

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

© ארזים

6 בדצמבר 2016

1 אינטגרל רימן

1.1 סכומי רימן והגדרה ראשונית

הגדרה 1.1 בהנתן תיבה כלשהי Q , ובהנתן $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$, לוקחים חלוקה $P = \{P_i\}$ של Q לתיבות קטנות יותר, ולוקחים נקודות מתאימות $\xi_i \in P_i$, ואז סכום רימן של f ביחס לחלוקה P עם הנקודות המתאימות $\{\xi_i\}$ הוא:

$$R(f, P, \{\xi_i\}) = \sum_i f(\xi_i) \operatorname{vol}(P_i)$$

אם נסמן $P = \{a_i \leq x_i \leq b_i\}$ תביה כלשהי, מגדירים גם $d(P) = \max_i (b_i - a_i)$, ואז העדינות של החלוקה $P = \{P_i\}$ היא

$$|P| = \max_i d(P_i)$$

הגדרה 1.2 בהינתן $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ מתיבה כלשהי, אזי I הוא אינטגרל רימן של f אם מתקיים

$$I = \lim_{|P| \rightarrow 0} R(f, P, \{\xi_i\})$$

במובן הבא: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P עם $|P| < \delta$ ולכל בחירה של נקודות מתאימות $\{\xi_i\}$, מתקיים

$$|R(f, P, \{\xi_i\}) - I| < \varepsilon$$

דוגמאות

1. אם f אינטגרלית אזי f חסומה.

2. אם $f = c$ קבועה אזי f אינטגרלית. נחשב את האינטגרל: נבחר חלוקה P כלשהי של Q , ונקבל, לכל בחירת נקודות מתאימות

$$R(f, P, \{\xi_i\}) = \sum_i f(\xi_i) \cdot \operatorname{vol} P_i = c \sum_i \operatorname{vol} P_i = c \cdot \operatorname{vol} Q$$

3. דוגמא נגדית: עבור $Q = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, ניקח את פונקציית דיריכלה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

נפריד לשני מקרים אפשריים (יש יותר) - אם הנקודות המתאימות רציונאליות, אזי סכום רימן הוא בוודאי 0. אם הנקודות המתאימות אי רציונאליות, סכום רימן יהיה $|b - a|$. לכן בפרט אין גבול לסכומי רימן.

1.2 סכומי דרבנו

בהנתן חלוקה $P = \{P_i\}$ של Q ופונקציה $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה, נגדיר

$$M_i = \sup_{P_i} f$$

$$m_i = \inf_{P_i} f$$

הגדרה 1.3 התנודה של f על הקוביה P_i היא

$$\omega(f, P_i) = M_i - m_i = \sup_{P_i} f - \inf_{P_i} f = \sup_{x, y \in P_i} |f(x) - f(y)|$$

הגדרה 1.4 סכומי דרבנו, העליון והתחתון, בהתאמה, של f ביחס לחלוקה P , הם

$$S(f, P) = \sum_i M_i \text{vol}(P_i)$$

$$s(f, P) = \sum_i m_i \text{vol}(P_i)$$

כמובן מתקיים $s(f, P) \leq S(f, P)$.

טענה 1.5 לכל חלוקה P ולכל בחירת נקודות מתאימות $\{\xi_i\}$, מתקיים

$$s(f, P) \leq R(f, P, \{\xi_i\}) \leq S(f, P)$$

טענה זו מיידיית.

הגדרה 1.6 נגדיר סדר חלקי על חלוקות: נגיד כי $P_1 \leq P_2$, ואומרים כי P_2 עדינה יותר, אם מתקיים P_2 מכילה יותר מישורי חלוקה (ראינו את ההגדרה הזו בשיעור שעבר).

לא כל שתי חלוקות P_1, P_2 ניתנות להשוואה, אבל כן ניתן לבנות חלוקה נוספת $P_1 \cup P_2$ שעדינה יותר מאשר P_1, P_2 . כלומר

$$P_1 \cup P_2 \geq P_1, P_2$$

בונים אותה על ידי לקיחת חלוקה לפי כל מישורי החלוקה של P_1 או של P_2 (ממש איחוד).

טענה 1.7 1. נניח כי $P_1 \leq P_2$ שתי חלוקות של Q . אזי

$$s(f, P_1) \leq s(f, P_2) \leq S(f, P_2) \leq S(f, P_1)$$

2. לכל שתי חלוקות P_1, P_2 של Q , מתקיים

$$s(f, P_1) \leq S(f, P_2)$$

הוכחה:

1. נוכיית עבור סכומי דרבו העליונים, הבדיקה עבור התחתונים דומה ותישאר כתרגיל. ניקח $P_i \in P_1$. אזי P_i תורמת לסכום $S(f, P_1)$ את האיבר $M_i \text{vol} P_i$. בחלוקה העדינה יותר P_2 , P_i מחולקת ליותר תיבות, שנשמך $R_{i,j}$. אזי P_i תורמת לסכום $S(f, P_2)$ את

$$\sum_j \sup_{R_{i,j}} f \cdot \text{vol} R_{i,j} \stackrel{R_{i,j} \subseteq P_i}{\leq} M_i \sum_j \text{vol} R_{i,j} = M_i \text{vol} P_i$$

לכן כל תיבה P_i של P_1 תורמת יותר לסכום $S(f, P_1)$ מאשר לסכום $S(f, P_2)$, ולכן $S(f, P_2) \leq S(f, P_1)$ כמו שרצינו.

2. ניקח $P = P_1 \cup P_2 \geq P_1, P_2$. מסעיף 1 נובע

$$s(f, P_1) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq S(f, P_2)$$

■

הגדרה 1.8 תהי $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. האינטגרל העליון והאינטגרל התחתון של f , בהתאמה, הם

$$I^*(f) = \inf_P S(f, P)$$

$$I_*(f) = \sup_P s(f, P)$$

כמובן, תמיד מתקיים

$$I^*(f) \geq I_*(f)$$

משפט 1.9 תהי $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. f אינטגרלית רימן אם ורק אם $I^*(f) = I_*(f)$ ואז

$$I = \int_Q f = I^*(f) = I_*(f)$$

הוכחה: נניח כי f אינטגרבילית. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P עם $|P| < \delta$ ולכל בחירת נקודות מתאימות $\{\xi_i\}$ מתקיים

$$I - \varepsilon < R(f, P, \{\xi_i\}) < I + \varepsilon$$

מהגדרת סכומי דרבו נובע שמתקין

$$I - \varepsilon < s(f, P) \leq S(f, P) \leq I + \varepsilon$$

משום שלקחנו ε שרירותי מתקיים

$$I = I^*(f) = I_*(f)$$

בכיוון השני, נניח כי $I^*(f) = I_*(f)$. בשביל ההוכחה נראה קודם למה:

למה 1.10 תהי $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. אזי

$$I^*(f) = \lim_{|P| \rightarrow 0} S(f, P)$$

$$I_*(f) = \lim_{|P| \rightarrow 0} s(f, P)$$

באותו מובן שהגדרנו גבול כזה עבור סכומי רימן, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיימים $\delta_1, \delta_2 > 0$ כך שלכל חלוקה P עם $|P| < \delta_1$ מתקיים

$$S(f, P) - I^*(f) < \varepsilon$$

וכן לכל חלוקה P עם $|P| < \delta_2$ מתקיים

$$I_*(f) - s(f, P) < \varepsilon$$

הוכחה: ניתן להניח כי $f \geq 0$ בלי הגבלת הכלליות, כי f חסומה, ולכן על ידי הוספת הקבוע נוכל לקבל ממנה פונקציה חיובית.

נוכיח את החלק על $I^*(f)$, החלק השני דומה. נקח $\varepsilon > 0$, ואז מהגדרת האינפימום קיימת חלוקה P_1 עבורה

$$I^*(f) \leq S(f, P_1) \leq I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

כעת נסמן $M = \sup_Q f > 0$, ונבחר

$$\delta = \frac{\varepsilon}{g}$$

נגדיר את g בעתיד. כעת, נבחר חלוקה P עבורה $|P| < \delta$ ונרצה להראות כי $|S(f, P) - I^*(f)| < \varepsilon$. את התיבות P_i של החלוקה P נחלק לשתי קבוצות:

$$A = \{P_i \in P \mid \exists P' \in P_1. P_i \subseteq P'\}$$

$$B = P \setminus A$$

נעריך את הנפח הכולל של כל התיבות מתוך B . מותר לכל מישור חלוקה להתרחק מאלה של P_1 לכל היותר δ , בגלל העדינות. אם נסמן את הקצוות במימד i של התיבות בתור $a_i < b_i$, ובתור m_i את כמות המישורים שמחלקים במימד i , נקבל שנפח כל התיבות של B הוא לכל היותר

$$2\delta \left(\max_i |b_i - a_i| \right)^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n m_k$$

כעת, נוכל לכתוב כעת נוכל סופסוף להגדיר את g :

$$g = 4M \left(\max_i |a_i - b_i| \right)^{n-1} \sum_{k=1}^n m_k$$

ואז נוכל לחשב:

$$\begin{aligned} S(f, P) &= \sum_i M_i \text{vol} P_i = \sum_{P_i \in A} M_i \text{vol} P_i + \sum_{P_i \in B} M_i \text{vol} P_i \leq \\ &\leq S(f, P_1) + M \cdot \sum_{P_i \in B} \text{Vol} P_i = I^*(f) + \frac{\varepsilon}{2} + 2\delta \cdot M \cdot \left(\max_i |a_i - b_i| \right)^{n-1} \cdot \sum_{k=1}^n m_k = \\ &= I^*(f) + \varepsilon \end{aligned}$$

■

ולכן סיימנו.

כעת נסמן $I^*(f) = I_*(f) = I$ ואז נקבל

$$\lim_{|P|} S(f, P) = I = \lim_{|P|} s(f, P)$$

כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $|P| < \delta$ אז בהכרח מתקיים

$$I - \varepsilon < s(f, P) < S(f, P) < I + \varepsilon$$

כמובן, לכל בחירת נקודות מתאימות $\{\xi_i\}$ מתקיים

$$I - \varepsilon < s(f, P) < R(f, P, \{\xi_i\}) < S(f, P) < I + \varepsilon$$

לכן מהגדרת אינטגרל רימן,

$$I = \int_Q f$$

■

מסקנה 1.11 תהי $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. f אינטגרלית אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P עבורה

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$$

מסקנה זו ישירה מהמשפט הקודם.

1.3 תכונות של פונקציות אינטגרליות

1. ראינו כבר כי

$$\int_Q c = c \cdot \text{vol} Q$$

2. מתקיים גם, עבור f, g אינטגרליות,

$$\int_Q f + \int_Q g = \int_Q f + g$$

3. עבור f, g אינטגרליות גם $f \cdot g$ אינטגרלית. הרי מתקיים

$$\begin{aligned} |fg(x) - fg(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq \\ &\leq |\sup f| |g(x) - g(y)| + |\sup g| |f(x) - f(y)| \end{aligned}$$

ומכאן, יחד עם המסקנה מהמשפט האחרון, נוכל לחסום את התנודה של fg על ידי התנודות של f, g , שהן קטנות (כי הן אינטגרליות).

4. תרגיל - אם f אינטגרלית אזי $|f|$ אינטגרלית ומתקיים

$$\left| \int_Q f \right| \leq \int_Q |f|$$

רמז: אי שוויון המשולש ההפוך.

5. תרגיל - אם f, g אינטגרליות אזי גם $\max(f, g), \min(f, g)$ אינטגרליות.

6. אם $f \leq g$ אינטגרביליות אזי

$$\int_Q f \leq \int_Q g$$

7. אם f אינטגרבילית על Q , $P \subseteq Q$ תת תיבה, אזי f אינטגרבילית גם על P . ניתן לעשות זאת על ידי הוספת הפאות של P בתור מישורי חלוקי לכל חלוקה של Q , וזה רק יקטין את התנודה.

8. תרגיל - אם Q מחולקת לתתי תיבות P_i , וכן f אינטגרבילית על כל P_i , אזי f אינטגרבילית על Q .

9. אם f רציפה על Q אזי היא אינטגרבילית עליו (רמז: משפט קנטור אומר כי f רציפה במידה שווה על Q).