

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 3

© ארזים

10 בדצמבר 2016

בשיעורים קודמים דיברנו על הנורמה האופרטורית של A :

$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)}$$

נראה כעת שוב את השוויון האחרון בעזרת כופלי לגראנז'. נגדיר

$$f(x) = \langle A^*Ax, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = |Ax|^2$$

זו פונקציית המטרה. נסמן מעתה $A^*A = M$, שהיא סימטרית כמובן. האילוץ יהיה $g(x) = \langle x, x \rangle - 1$. כלומר יכריח אותנו להסתכל על ספירת היחידה. ממשפט כופלי לגראנז', קיים λ עבורו $\nabla = \lambda \nabla g$ בנקודת המקסימום. מתקיים כמובן

$$Df(h) = \langle \nabla f, h \rangle$$

לכן נחשב את $Df(h)$.

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \langle M(x+h), x+h \rangle - \langle Mx, x \rangle = \\ &= \langle Mx, x \rangle + \langle Mx, h \rangle + \langle Mh, x \rangle + \langle Mh, h \rangle - \langle Mx, x \rangle = \\ &\stackrel{*}{=} 2 \langle Mh, x \rangle + o(h) \end{aligned}$$

השוויון * נובע מכך שהמטריצה M סימטרית. לכן נקבל $D_x f(h) = 2 \langle Mx, h \rangle$, כלומר בהכרח $\nabla_x f = 2Mx$. כמו כן, ברור כי $\nabla_x g = 2x$. לכן מתקיים בנקודת המקסימום עבור λ כלשהו

$$Mx = \lambda x$$

לכן λ ערך עצמי של M , וכן x ווקטור עצמי. M סימטרית, לכן קיים בסיס אורתונורמלי של ווקטורים עצמיים שלה. נחזור להסתכל על $f(x)$:

$$f(x) = \langle Mx, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda$$

נשים לב שקיבלנו בדיוק את מה שרצינו - מהמשפט המקסימום תחת האילוצים מתקבל בנקודה x כלשהי, וראינו כי x וקטור עצמי עם ערך עצמי λ . אבל קיבלנו $f(x) = \lambda$ וזהו λ המקסימלי תחת האילוץ, ולכן זהו הערך העצמי הגדול ביותר של M . אם כן, סיימנו את פרק הדיפרנציאביליות.

1 אינטגרל רימן

נחפש דרך להכליל את האינטגרל הרגיל שלנו למרחב $\mathbb{R}^n$. נלמד על אינטגרל באמצעות תיבות וסכומי רימאן, ונמשיך מאוחר יותר למידת ז'ורדן.

הגדרה 1.1 עבור $a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n)$ נסמן

$$Q_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$$

זוהי תיבה בתוך $\mathbb{R}^n$.

"תיבת נוח, כפי שרימאן ציווה עלינו" -המרצה.

הגדרה 1.2 נגדיר חלוקה של תיבה Q להיות $P = \{P_i\}_{i=1}^k$ כך שמתקיים

$$Q = \bigcup_{i=1}^k P_i$$

וגם $\text{Int}(P_i) \cap \text{Int}(P_j) = \emptyset$ לכל $i \neq j$.

הגדרה 1.3 נסמן

$$\text{vol}(Q_{a,b}) = \prod_{i=1}^n |b_i - a_i|$$

כמו כן נגדיר $d(Q_{a,b}) = \max_i |b_i - a_i|$.

הגדרה 1.4 נגדיר יחס סדר חלקי של חלוקות: אם $P_1 \leq P_2$ אם P_2 עידון של P_1 . נגדיר מפורשות: אם $P_1 \leq P_2$ אם לכל תיבה $P \in P_2$ קיימת ויחידה תיבה $R \in P_1$ עבורה $\text{Int}(P) \subseteq R$.

מסקנה 1.5 עבור אותן $P \in P_2, R \in P_1$ מתקיים $\text{vol} P \leq \text{vol} R, d(P) \leq d(R)$.

הגדרה 1.6 תהי $f: Q_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}$, ותהי P חלוקה של $Q_{a,b}$. נבחר באקראי נקודה ξ_i על כל תיבה $P_i \in P$ ונגדיר את סכום רימן להיות

$$R(f, P, \{\xi_i\}) = \sum_i f(\xi_i) \cdot \text{vol}(P_i)$$

הגדרה 1.7 נאמר כי $f : Q_{a,b} \rightarrow \mathbb{R}$ אינטגרבילית (לפי רימאן) ובעלת אינטגרל I אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P של $Q_{a,b}$ עם $\max_i d(P_i) < \delta$ ולכל בחירה של נקודות מתאימות $\{\xi_i\}$ מתקיים

$$|R(f, P, \{\xi_i\}) - I| < \varepsilon$$

בדיוק מה שציפינו לראות אחרי חדו"א 2. נסמן במקרה של אינטגרביליות:

$$I = \int_{Q_{a,b}} f \, dx = \int_{Q_{a,b}} f(x) \, dx_1 \dots dx_n$$

הערה 1.8 למעשה לרוב נרצה לומר

$$I = \lim_{\max_i d(P_i) \rightarrow 0} R(f, P, \{\xi_i\})$$

בשבוע הבא נראה, בין היתר, כי אם f אינטגרבילית, אזי היא בהכרח חסומה.