

7/5/13

VIII קומבינטוריקה - גסיס - שי"ר

Erdos-Ko-Rado משפט

$n \geq 2k$ $S_1, \dots, S_m$ k $[n]$ k $(S_i \cap S_j \neq \emptyset)$ $\binom{n-1}{k-1} \geq k$

Kruskal-Katona משפט

$S_1, \dots, S_m$ k $[n]$ k n $m = \binom{n}{k}$ $\sigma_k(S)$ $\sigma_k(S_1, \dots, S_m) = \bigcup \sigma_k(S_i)$ $\sigma_k(S_1, \dots, S_m) \geq \binom{n}{k}$

EkR $\leftarrow$ K

$S_1, \dots, S_m$ k $T_i = [n] \setminus S_i$ $\sigma_k(T_1, \dots, T_m) \geq \binom{n-1}{k}$ $\sigma_k(T_1, \dots, T_m) = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ $S_i \in \sigma_k(T_1, \dots, T_m)$ $S_i \subseteq [n] \setminus S_j$ $S_i \cap S_j = \emptyset$

נוכח רק מקרה פרטי:

$m = \binom{n}{3}$ 3 (u, v) (u, v) (u, v)

הוכח שניכח $\leftarrow$ השערה הבאה:

$\binom{n}{2}$ $\binom{n}{3}$

$D(v)$ $d(v)$

$\binom{d(v)}{2} \geq D(v)$ $m - d(v) > 0$

$$3 \# K_3(G) = \sum_v D(v) = \sum_v \left(\frac{x-2}{2} \right) d(v) = \left(\frac{x-2}{2} \right) \sum_v d(v) = \left(\frac{x-2}{2} \right) 2m = \left(\frac{x-2}{2} \right) x(x-1)$$

$$\Rightarrow \# K_3(G) \leq \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = \binom{x}{3}$$

הוכחה:

$$\binom{d}{2} \leq \frac{x-2}{2} \cdot d \Rightarrow \frac{d(d-1)}{2} \leq \frac{x-2}{2} \cdot d \Rightarrow d-1 \leq x-2 \Rightarrow d \leq x-1$$

$$m-d \leq \frac{x-2}{2} d \Rightarrow \frac{x(x-1)}{2} - d \leq \frac{x-2}{2} d \Rightarrow x(x-1) - 2d \leq x d - d^2$$

$$\Rightarrow x-1 \leq d$$

הוכחה - תצורה

$$| \bigcup_{i=1}^n S_i | \quad \text{כאשר } S_1, \dots, S_n \text{ קבוצות זרות}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \quad : n=2$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \quad : n=3$$

$$| \bigcup_{i=1}^n S_i | = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} | \bigcap_{i \in I} S_i |$$

הוכחה

$$| \bigcup_{i=1}^{n+1} S_i | = | \left(\bigcup_{i=1}^n S_i \right) \cup S_{n+1} | = | \bigcup_{i=1}^n S_i | + | S_{n+1} | - | \left(\bigcup_{i=1}^n S_i \right) \cap S_{n+1} |$$

$$= \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} | \bigcap_{i \in I} S_i | + | S_{n+1} | - | \bigcup_{i=1}^n (S_i \cap S_{n+1}) |$$

$$= \quad " \quad + \quad " \quad - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|-1} | \bigcap_{i \in I \cup \{n+1\}} S_i | =$$

$$= \quad " \quad + \quad " \quad + \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} | \bigcap_{i \in I \cup \{n+1\}} S_i | = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n+1]} (-1)^{|I|-1} | \bigcap_{i \in I} S_i |$$

I קבוצה זרה
ממ $\{1, \dots, n+1\}$

I קבוצה זרה
ממ $\{1, \dots, n+1\}$

$n+1$ איננו
ב I (כי $I \subseteq [n]$)

I קבוצה זרה
ממ $\{1, \dots, n+1\}$

$$|I| = |I| + 1$$

(ג) צ'ר - A; אולם המושב בתן צילק ו יושב עמון קצת
B; , , , , , , שמשאוי

[מאכלי: צ'ריר, פריז, בן-דוד, סוף, סוף...]

$f(n, k)$ $\rightarrow$ n $\rightarrow$ k $\rightarrow$ $f(n, k)$

B_1, B_2, A_1, A_2 * 3. f. d. $a_n - n$ p. d. f. d. $f(n, 1) = a_n$: f. d. p. d.

~~Handwritten notes and scribbles, including the word "B" and various symbols.~~

סדרה 1 (אם יש בגירה לא אפשרית כמו $A_3 B_3$) או $(n-r)!$

הערה: A, B זוגיים $\Leftrightarrow n=1$ ובמקרה הזה בה נקרה $M(n)=1$
 עין קבלנו:

$$M(n) = n! - \left| \bigcup_{i=1}^n (A_i \cup B_i) \right| = n! - \underbrace{f(n,1)}_{=0} (n-1)! + \underbrace{f(n,2)}_{=0} (n-2)! - \dots$$

נא בואו בענדיה הייליג:

בדיעבד חושב נעקד ממוצע
ממוצע של ו/א דאורק חמ

$\exists x \forall y (x \neq y) \Rightarrow a$

1) $\frac{1}{100}$ 2) $\frac{1}{100}$ 3) $\frac{1}{100}$ 4) $\frac{1}{100}$ 5) $\frac{1}{100}$ 6) $\frac{1}{100}$ 7) $\frac{1}{100}$ 8) $\frac{1}{100}$ 9) $\frac{1}{100}$ 10) $\frac{1}{100}$

נש' האבריות / אדיר ר' איון + אפרים = נש' החירות / המשלך

ה'תש"ח

$$f(n, r) \equiv \varphi(r)N^3 \quad \varphi(r) = 1$$

ב סוף ינו' 88 ח"ז מתצורה:

[illegible]

8/10 * הקצוצה הרגלונה, חלש"ה...

$\log k + \log n$

$(x)_k$ - פקטוריאלי

מקרה 1: הגו' הראשון הוא 1.

אם בגיו' $r-1$ יש r גורמים שכולם $x_i > 0$ אז בגיו' r יהיו $r-1$ גורמים שכולם $x_i > 0$ ו-1 גורם שהוא 1.
 $\sum_{i=1}^r x_i = 2n-r$
 $\binom{2n-r-1}{r-1}$ אפשרות

מקרה 2: מקרה ראשון יש 0. צריך פגמ' $r+1$ מהמק' בגיו' r .
 $\sum_{i=1}^r x_i = 2n-r+1$
 $\binom{2n-r}{r}$

$$f(n, r) = \binom{2n-r}{r} + \binom{2n-r-1}{r-1}$$

$$M(n) = \sum_{r=0}^n (-1)^r (n-r)! \cdot \left(\binom{2n-r}{r} + \binom{2n-r-1}{r-1} \right)$$

מספרים סטורנלי מסוג שני:

$S(n, k)$ - מספר האפשרויות בהן ניתן לחלק n גורמים ל- k קבוצות.
 $S(n, n) = 1$ (כל גורם לבדו)
 $S(n, 1) = 1$ (כל הגורמים יחד)

ניסוח $B_n - B$ (מספר Bell) הוא מספר האפשרויות בהן ניתן לחלק n גורמים ל-1 קבוצה.
 $B(n) = S(n, 0) + S(n, 1) + \dots + S(n, n)$

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$$

דוגמה: $S(4, 2) = 7$. אפשרויות: $\{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{1,2,3,4\}$

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k) (x)_k \quad [(x)_k = x(x-1)\dots(x-k+1)]$$

הוכחה:

נניח שיש n גורמים, נחלק אותם ל- k קבוצות. נבחר קבוצה אחת, נניח שהיא $\{1, 2, \dots, k\}$. נחלק את שאר הגורמים ל- $k-1$ קבוצות.

מספרים סטורנלי מסוג ראשון: $C(n, k)$ - מספר האפשרויות בהן ניתן לחלק n גורמים ל- k קבוצות, כאשר הקבוצות אינן ריקות.

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$$

$C(n, n) = 1$ (כל גורם לבדו)
 $C(n, 0) = 0$ (אין גורמים)
 $C(n, 1) = 1$ (כל הגורמים יחד)

דוגמה:

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)$$

$$\sum_{k=0}^n C(n,k) x^k = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)$$

$$\therefore x(x+1) \cdots (x+n-1) = \sum_{k=0}^n b(n,k) x^k \quad \text{הנחה}$$

$$n \geq 0 \Rightarrow b(n,n) = 1$$

$$k > n \Rightarrow b(n,k) = 0$$

$$n > 0 \Rightarrow b(n,0) = 0$$

$$x(x+1) \cdots (x+n-2)(x+n-1)$$

$$b(n,k) = b(n-1,k-1) + (n-1)b(n-1,k)$$

כמו כן, אפשר

לכתוב:

הוכחה: נניח שהמשוואה נכונה עבור $n-1$.

$$S(n,k) = (-1)^{n-k} C(n,k)$$

הסימן של $C(n,k)$ הוא $\pm$

$$(x)_n = \sum_{k=0}^n S(n,k) x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C(n,k) x^k = (-1)^n \sum_{k=0}^n (-1)^k C(n,k) x^k =$$

$$= (-1)^n \sum_{k=0}^n (-x)^k C(n,k) = (-1)^n (-x)(-x+1)(-x+2) \cdots = x(x-1)(x-2) \cdots (x-n+1)$$

$$\text{הסימן של } S(n,k) \text{ הוא } (-1)^{n-k} \quad \text{הסימן של } C(n,k) \text{ הוא } \pm$$

הוכחה:

אם n זוגי, יש מספר שלם של $C(n,k)$ חיוביים. אם n אי-זוגי, יש מספר שלם של $C(n,k)$ שליליים.

הוכחה:

נניח $x=1$. אז $(1)_n = 0$ עבור $n > 0$. לכן $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C(n,k) = 0$.

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C(n,k) = 0$$

~~הוכחה:~~

הוכחה: נניח שהמשוואה נכונה עבור $n-1$.

הוכחה:

נניח $x \rightarrow i, y \rightarrow j$. אז $(i)_n = 0$ עבור $n > i$.

$$\begin{pmatrix} i & \rightarrow & y \\ & & \\ & & \\ & & \\ x & \leftarrow & j \end{pmatrix} \quad \text{או} \quad \begin{pmatrix} i & x \\ \downarrow & \uparrow \\ & y & j \end{pmatrix}$$

הוכחה: נניח שהמשוואה נכונה עבור $n-1$. אז $(i)_n = 0$ עבור $n > i$. לכן $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C(n,k) = 0$.