

סיכום רשמי

מכאן: $\mathcal{R}$ ע"פ K ו- $\mathcal{R}$ סגור תחת $\mathcal{R}$
 תכונה: $\mathcal{R} = \{x_f\}_{f \in K[x]}$
 נוסף: $\mathcal{R} = \{x_f\}_{f \in K[x]}$

$$R = K[x_f \mid f \in K[x]]$$

נכתב במובן

היום: הוכחנו כי R הוא K ו- $\mathcal{R}$ סגור תחת $\mathcal{R}$
 נכתב: $I = \langle x_f \mid f \in K[x] \rangle \neq R$
 נכתב: $I \subseteq M$ ו- $R \rightarrow \mathcal{R}$ ו- $\mathcal{R} = R \setminus M$

ע"פ: $K \subseteq \mathcal{R} \rightarrow R \rightarrow \mathcal{R}$
 נכתב: $f \in K[x]$ ו- $\mathcal{R} \ni \alpha_f = x_f + M$

ר- $\mathcal{R}$ ו- $\mathcal{R}$ סגור תחת $\mathcal{R}$
 (1) $K \subseteq \mathcal{R}$ ו- $\mathcal{R} \ni \alpha_f = x_f + M$
 (2) $\mathcal{R} \ni \alpha_f = x_f + M$

$\mathcal{R} \ni \alpha_f = x_f + M$ ו- $\mathcal{R} \ni \alpha_g = x_g + M$
 נכתב: $K \subseteq \mathcal{R}$ ו- $\mathcal{R} \ni \alpha_f = x_f + M$
 נכתב: $K \subseteq \mathcal{R}$ ו- $\mathcal{R} \ni \alpha_f = x_f + M$

$$K[\alpha_f] = K[\alpha_f, \alpha_g]$$

נכתב: $K[\alpha_f] = K[\alpha_f, \alpha_g]$ ו- $\mathcal{R} \ni \alpha_f = x_f + M$
 נכתב: $K[\alpha_f] = K[\alpha_f, \alpha_g]$ ו- $\mathcal{R} \ni \alpha_f = x_f + M$

* חתום: רשמי

1.6 הוכחה המשפט
 תהי R תחום $R \neq 0$ ויהי $f: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$
 המקיימת:
 (PID) $f(xy) = f(x) + f(y)$ הוכחה
 (3) $f(x) < f(y) \Rightarrow x \mid y$ הוכחה
 $K[x], \mathbb{Z}$ הוכחה

תהי R תחום $R \neq 0$ ויהי $f: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$
 המקיימת:
 (PID) $f(xy) = f(x) + f(y)$ הוכחה
 (3) $f(x) < f(y) \Rightarrow x \mid y$ הוכחה
 $f(n) = \ln |n|$ הוכחה
 $f(p) = \deg p$ הוכחה
 $K[x]$ הוכחה

let $I \trianglelefteq R$ הוכחה
 תהי R תחום $R \neq 0$ ויהי $f: R \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$
 המקיימת:
 (PID) $f(xy) = f(x) + f(y)$ הוכחה
 (3) $f(x) < f(y) \Rightarrow x \mid y$ הוכחה
 $f(n) = \ln |n|$ הוכחה
 $f(p) = \deg p$ הוכחה
 $K[x]$ הוכחה

$f(a) \in \mathbb{Z}$ הוכחה

$\mathbb{Z}[\alpha] = \{a + b\alpha : a, b \in \mathbb{Z}\}$ הוכחה
 $\alpha = \frac{1 + \sqrt{-19}}{2}$ הוכחה
 PID הוכחה

PID הוכחה
 PID הוכחה

$a = b \vee c$ פ"ק, a חסר b ו- c $\rightarrow$ $a \in R$ 1
 $a \neq b$ ו- $a \neq c$ $\rightarrow$ $a \notin R$ 2
 $a \in R$ $\rightarrow$ $a = b \vee c$ 3

1. $p \in R, p \neq 0 \Rightarrow$ האלמנט $\langle p \rangle$ (חז"ל)
2. $a \neq 0$ ח"י פירק $\Rightarrow \langle a \rangle$ מקסימל חיים חלופות
3. חז"ל ח"י האלמנט $\langle a \rangle$ מקסימל $\Leftarrow a$ ח"י פירק (חז"ל חז"ל)
4. חז"ל ח"י האלמנט $\langle a \rangle$ מקסימל $\Leftarrow a$ ח"י פירק (חז"ל חז"ל)
5. חז"ל ח"י האלמנט $\langle a \rangle$ מקסימל $\Leftarrow a$ ח"י פירק (חז"ל חז"ל)

5. המשפט R של איזומורפיזם a, b חזק $\Leftrightarrow \langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$
הוכחה: המשפט R $\subseteq$ איזומורפיזם $\Rightarrow$ חזק a, b כי $p \in \langle a \rangle$
הוכחה: המשפט R $\subseteq$ $p \in R$ $\Rightarrow$ $p \in \langle a \rangle$
 $\Leftrightarrow \langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle \Leftrightarrow p \in \langle b \rangle \Leftrightarrow p = ab$
 $\Leftrightarrow \langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle \Leftrightarrow p = pc \Leftrightarrow p = ac \Leftrightarrow p = apc$

4 חלק-6 ת"ב

[illegible]

$f \in \text{one}$ x_{f+M} $\frac{\text{Kof One}}{\text{one}}$ R/M
 $\otimes 1 \notin \langle f(x_p) \rangle$ one one

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{g_i(x)}_{\text{פולינום}} \underbrace{f_i(x_i)}_{\text{פולינום}} \quad \text{אם } L/k \text{ נורמלי}$$
 אם L/k לא נורמלי, אז $f_i(x_i) = 0$

$$R \rightarrow \{ \langle x_i, f_i \rangle \mid x_i \vdash \alpha_i \}$$

$p \neq p_i$ $x_f \mapsto x_f$
 $\otimes$ for any G $K \mapsto K$

! 20/10 $1 = \sum \bar{g}_i f_i(x_i) = 0$

$UFP \Rightarrow$ תחום אוקטונים $\Rightarrow$ תחום ריבועי $\Rightarrow$ תחום $\Rightarrow$ FD

$$a=bc \iff (a, b) \text{ זרם } \forall c \neq 0 \in R \text{ ו} \forall c$$

$\begin{matrix} 200 & b & 50 \\ 200 & c & 100 \end{matrix}$

$$\begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Leftrightarrow a|bc \quad \Leftrightarrow \begin{matrix} \text{ist } 0 \neq a \in \mathbb{R} \\ \text{mit } b, c \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$\Leftrightarrow a' = bu$ -e $\exists u$ $\exists a' \in A$ $\Leftrightarrow a \sim b$
 $a \sim b$, rel $b \sim a$

סדרה חלוצית $\leq$ אי-סוף
 (הצדקה) תחום R נקרא תחום פריק (FD)
 אם לכל $a \neq 0$ יש פירוק $a = p_1 \cdots p_r$ $r=0$ או $r=1$
 כאשר הפירוקים p_i אינם פריקים (אינם יכולים להיפרק)
 (ישנם פירוקים יחידים לאי-פריקות)
 כלומר: $\mathbb{Z} = [\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \dots]$ FD הוא

$$2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2} \sqrt{2}) (\sqrt{2} \sqrt{2}) \dots$$

סדרה תחום שלמות R הוא FD

למעשה נוכחנו שהיא תחום חזק: כלומר לכל $a \neq 0$ יש
 פירוק יחיד (הפירוקים הם אותם). נגיד שיש שני פירוקים
 של אותו האלמנט a אז הם שווים
 כלומר: $a = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$

$$(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5}) = 1-5 = -4$$

טכניקה: מקיף $\Rightarrow$ אי-פריקות $FD \Leftarrow$
 חזקה: כמו בתחום, תחום חזק $\Rightarrow$ תחום $\Leftarrow$ אם
 קיימים אלמנטים a, b שאינם פריקים
 נסתכל בקבוצה

$$I = \{a \in R \mid \exists b \in R, a = b \cdot c \text{ for some } c \in R\}$$

נניח $a \in I$ אז $a = b \cdot c$ $c \in R$ $a \in I$ $\Rightarrow$ $a \in I$ $\Rightarrow$ $a \in I$
 אם $a \in I$ אז $a = b \cdot c$ $c \in R$ $a \in I$ $\Rightarrow$ $a \in I$
 כל הפירוקים אפשריים הם אותם a $\Rightarrow$ $a \in I$
 אם $a \in I$ $\Rightarrow$ $a \in I$ $\Rightarrow$ $a \in I$

הצדקה: תחום R נקרא תחום פריק יחיד (UFD)

אם לכל $a \neq 0$ יש פירוק יחיד $a = p_1 \cdots p_r$
 (יחידות עד כדי סדר וצורה)

הוכחה: נחלק את R לפי FD ונראה כי R הוא FD (כלומר R הוא FD).

1. R הוא FD (כלומר R הוא FD).

2. R הוא FD (כלומר R הוא FD).

3. R הוא FD (כלומר R הוא FD).

נוסף: $\langle a \rangle \subseteq \langle a \rangle$ $\Leftrightarrow$ $a \in \langle a \rangle$ $\Leftrightarrow$ $a \in \langle a \rangle$ $\Leftrightarrow$ $a \in \langle a \rangle$ $\Leftrightarrow$ $a \in \langle a \rangle$

[illegible]

$\text{open } R/M \iff \text{open } m$
 $\text{prime } R/M \iff \text{prime } m$

Scanned with CamScanner

Scanned with CamScanner

$$\begin{aligned}
 d \mid bc \text{ and } d \mid a &\Rightarrow d \mid \gcd(a, bc) \\
 d \mid \gcd(a, bc) &\Rightarrow d \mid a \text{ and } d \mid bc \\
 d \mid a \text{ and } d \mid bc &\Rightarrow d \mid \gcd(a, b) \text{ and } d \mid c \\
 d \mid \gcd(a, b) \text{ and } d \mid c &\Rightarrow d \mid \gcd(a, b, c) \\
 \gcd(a, b, c) &= \gcd(\gcd(a, b), c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d \mid \gcd(ab, bc) &\Leftrightarrow d \mid ab \text{ and } d \mid bc \\
 d \mid ab \text{ and } d \mid bc &\Rightarrow d \mid a \text{ and } d \mid b \text{ and } d \mid c \\
 d \mid a \text{ and } d \mid b \text{ and } d \mid c &\Rightarrow d \mid \gcd(a, b, c)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a \mid bc &\Leftrightarrow a \mid \gcd(b, c) \text{ and } a \mid \frac{bc}{\gcd(b, c)} \\
 a \mid \gcd(b, c) \text{ and } a \mid \frac{bc}{\gcd(b, c)} &\Rightarrow a \mid bc
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{UFD} &\Leftrightarrow \text{FD} + \text{GCD} \\
 \text{FD} &\Leftrightarrow \text{Every non-zero element can be written as a product of irreducibles} \\
 \text{GCD} &\Leftrightarrow \text{Every two non-zero elements have a greatest common divisor} \\
 \text{GCD} &\Leftrightarrow \text{Every two non-zero elements have a unique greatest common divisor} \\
 \gcd(p, a) &= \gcd(p, b) = 1 \\
 \gcd(p, ab) &= 1
 \end{aligned}$$

הכרחי ונדרש

$$\begin{aligned}
 R &\text{ is a ring} \\
 I &\text{ is an ideal of } R \\
 f: R \rightarrow S &\text{ is a homomorphism} \\
 f(I) &\text{ is an ideal of } S \\
 \text{ex} &= f(I)S
 \end{aligned}$$

התמונה ההפוכה של π_3 היא J שם p
 $T := p^{-1}(J)$

$$J^c = f^{-1}(J)$$

$$R \xrightarrow[\text{ker } f]{\text{ker } f} R/\text{ker } f \xrightarrow{\text{ker } f} S$$
 תמונה של R $\xrightarrow[\text{ker } f]{\text{ker } f}$ $R/\text{ker } f$ $\xrightarrow{\text{ker } f}$ S

$\text{Jilke } P = (p) \triangleq \mathbb{Z} \text{ n.p.} \quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] \quad \text{: /CN? /?}$
 $p \equiv 2 \pmod{4} \quad \text{: /CN? /?}$

$$P \not\subset (\sqrt{-1}) = (1+i)^2 \not\subset (\sqrt{-1})$$

$$p \in [-\sqrt{1}] = (1+2i)(1-2i) \in \mathbb{C}^{p=5}$$

$p \nmid (\sqrt{-1}) = 1/2$ $p=3$ ok