

שדה $\neq$ (שדה 1)

משפט 3.10:

חוק (חוק חילופי או חוק יחידה): קבוצה R עם פעולות $+$ ו- $\cdot$ מהסוג $R \times R \rightarrow R$ ו- $R \times R \rightarrow R$ שמתאימות חוקי החילוף והחוק היחידה. $(R, +)$ חבורה חילופית אבלי.
 • כל אקסיומות (קבוצה)
 • ג'וסט'סיות (פולג) של החבורה

$\forall a, b \in R \quad ab = ba$
 $\forall a \in R \quad \exists 1 \in R \quad \forall a \cdot 1 = a$
 חוקי חילוף ויחידה

משפט 3.11: נקבע ונראה $ab = a \cdot b$
 $1 = 1 \cdot 1 = 1'$ סדר חילוף יחידה

משפט 3.12: $M_n(\mathbb{F})$ - מרחב וקטורי $\textcircled{1}$

$\mathbb{Z}$ חוקי חילוף $\textcircled{2}$

$2\mathbb{Z} = \{2x : x \in \mathbb{Z}\}$ - חוקי חילוף $\textcircled{3}$
משפט 3.13: $2\mathbb{Z}$ - חוקי חילוף $\textcircled{4}$

$\mathbb{C}[x]$ חוקי חילוף עם יחידה $\textcircled{5}$

$0 \cdot x = (0+0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x \therefore 0 \cdot x = 0 \quad x \in R$ משפט 3.14:

$0 \cdot x = 0$ וכן $x \cdot 0 = 0$ משפט 3.15: Ring וכן אנו קבוצה.

מרחב וקטורי של חוקי חילוף - מרחב וקטורי של חוקי חילוף
 יחידה: $f: R \rightarrow S$ (חוקי חילוף) $f(0) = 0$ $f(1) = 1$
 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $f(xy) = f(x)f(y)$ $f(1) = 1$

$S = \mathbb{C}[x]$, $R = \mathbb{C}$ משפט 3.16:
 $f(x, y) = f(x, 0)$ $f: R \rightarrow S$

$$x \mapsto 2x \quad f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

Def: $\text{Hom}_{\text{Ring}}(R, S) = \{ f: R \rightarrow S \mid f \text{ is a ring homomorphism} \}$
 $\text{id} \in \text{Hom}(R, R)$

The set of all ring homomorphisms from R to S is denoted by $\text{Hom}_{\text{Ring}}(R, S)$.
 The set of all ring homomorphisms from R to R is denoted by $\text{Hom}_{\text{Ring}}(R, R)$.

*

הצגה 1 (2 דקות)

הקצב: $f: R \rightarrow S$ הוכחה $fg = id_S$ $gf = id_R$ $f^{-1} = g$
 וסמך: $f^{-1} = g$

הוכחה: $g = g \circ id_S = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = id_R \circ h = h$
 (abstract nonsense)

$\Leftrightarrow f \in Hom(R, S)$ הוכחה f הוא חזקה

הקצב: $f: R \rightarrow S$ הוכחה $fg = id_S$ $gf = id_R$

$f \in Hom(R, S) \Rightarrow f: R \rightarrow S$ הוכחה $fg = id_S$ $gf = id_R$

$\exists g \in Hom(S, R), gf = id_R \Leftrightarrow f \in Hom(R, S)$!!!

יש שני מושגים חשובים בזה: הוכחה $fg = id_S$ $gf = id_R$

$\forall x \in R, 0 = 0 \cdot x = 1 \cdot x = x$ הוכחה $R = \{0\}$

$|Hom(S, R)| = 1$ הוכחה S הוא $\mathbb{Z}$ R הוא $\mathbb{Z}$ $\varphi: R \rightarrow R'$

$|Hom(\mathbb{Z}, R)| = 1$ הוכחה $\mathbb{Z}$ הוא $\mathbb{Z}$ $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow S$

$\{\varphi\} = Hom(\mathbb{Z}, S)$ הוכחה $\{\varphi\} = Hom(S, \mathbb{Z})$

ז. קריא וזכרתי התחלת.

נתן חוג R ו- R חוג, S חוג, $f: R \rightarrow S$ חוג
אם f מונומורפיזם

טענה $f: R \rightarrow S$ חוג, f מונומורפיזם
ביתם f מונומורפיזם חוג, f מונומורפיזם
ומכאן f מונומורפיזם חוג, f מונומורפיזם
מכאן f מונומורפיזם חוג, f מונומורפיזם

טענה: אם $f: R \rightarrow S$ חוג, f מונומורפיזם, אז $f(R)$ חוג
של S .

1.2 איזומורפיזם ומונומורפיזם

נתון $f: R \rightarrow S$ חוג, f מונומורפיזם
אז $f(R)$ חוג של S .

הערה: נתון קבוצה $I \subseteq R$ חוג, I חוג

1. I חוג חוג
2. I חוג חוג

אם $I \subseteq R$ חוג, אז I חוג
אם $I \subseteq R$ חוג, אז I חוג

הערה: נתון $I \subseteq R$ חוג, I חוג

$$R/I = \{x+I : x \in R\}$$

אם $f: R \rightarrow R/I$ חוג, אז f מונומורפיזם

אם $I \subseteq R$ חוג, אז I חוג

1. אם $f: R \rightarrow R/I$ חוג, אז f מונומורפיזם
אם $f: R \rightarrow R/I$ חוג, אז f מונומורפיזם

הוכחה
 R/I היא כנף *...
 $\bar{x} = x + I \in R/I$
 $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$

הוכחה: $I \triangleleft R \Leftrightarrow \overline{zw} = \overline{xy}$
 $\{ \bar{w} = \bar{x} \}$
 $\{ \bar{z} = \bar{y} \}$

$$zw - xy \in I \Leftrightarrow zw - wy + wy - xy \in I$$

$$\Leftrightarrow w(z-y) + y(w-x) \in I$$

לכן I היא כנף

$w=0$ - $x \in I$ נקודת זרימה
 $z=y$ - $y \in R$
 $0(z-y) + y(0-x) \in I \Rightarrow -xy \in I \Rightarrow xy \in I$

$$\mathbb{Z} \triangleright n\mathbb{Z} = \{nx : x \in \mathbb{Z}\}$$

$f \in \text{Hom}(R/S) \Rightarrow f(s) = 0$
 $(S = R/I, p \in I) \quad I = \ker(f)$

1.3

$J+I = \{x+y : x \in J, y \in I\}$
 $I, J \triangleleft R$
 J היא כנף

$$\sum_{I \in \mathcal{L}} I = \{x_1 + \dots + x_n \mid \begin{matrix} n \geq 0 \\ I_1, \dots, I_n \in \mathcal{L} \\ x_i \in I_i \end{matrix}\}$$

$\sum_{I \in \mathcal{L}} I \rightarrow \bigcup_{I \in \mathcal{L}} I$

$$(\forall x \in R \quad f(x) \in f(x + \ker f)) \text{ (באמת)}$$

2. f נשמה איז' בן הסר' $I(S)$ $I(R) = \ker f$

$$\ker f \subseteq I \trianglelefteq R \xrightarrow{\text{העברת יציבות}} f(I) \trianglelefteq S$$

והיציבות:

$$f^{-1}(J) = \{x \in R \mid f(x) \in J\} \longleftarrow J \trianglelefteq S$$

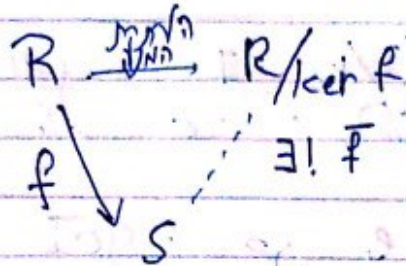
הרעיון * אם יש תמונה של h ב- f אז $h \in f^{-1}(J)$ וכל x ש- $h \in f^{-1}(J)$ אז $h \in f^{-1}(J)$ וכל x ש- $h \in f^{-1}(J)$ אז $h \in f^{-1}(J)$

* איסור על סדרה: הווא' $\mathbb{Z}$ של סדרה של $\mathbb{Z}$.

25.10

3 ימים

חוק - חוק חילוף עם יחידה
 $L(R)$ - פולינום המיוצג על ידי R
 $f: R \rightarrow S$ - מונומורפיזם
 $\bar{f}: R/\ker f \rightarrow S$ - מונומורפיזם
 $\bar{f}$ - מונומורפיזם
 $\bar{f}$ - מונומורפיזם



2. f - מונומורפיזם
 $\{I \in L(R) \mid \ker f \subseteq I\}$

מכאן: $f(\bar{x}) = f(x)$ - חוק חילוף
 $\bar{x} = x + \ker f$ - חוק חילוף

$$\bar{f}(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{f}(\overline{x+y}) = f(x+y) = f(x) + f(y) = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{y})$$

$$\Rightarrow f(x-y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \quad \text{if } x-y \in \ker f$$

$$\bar{x} = 0 \Leftrightarrow x \in \ker f \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \bar{f}(\bar{x}) = 0$$

$$\bar{f}(\bar{1}) = f(1) = 1$$

$$L(S) \cong L(R/\ker f)$$

$\dim \ker f = f^{-1}(0) = \dim \ker f$
 $\dim \ker f = f^{-1}(0) = \dim \ker f$

$$f(I) = \{x+k : x \in I\} = (I+k)/k$$
$$f(\pm) = I/K \text{ s.t. } K \subseteq I \text{ s.t. } 0 \neq 1$$

$f^{-1}(I/k) = I$ הכיוון $\Leftarrow$ הכלה $\Rightarrow$
 $x \in f^{-1}(I/k) = \{y \in I \mid y \in f^{-1}(I/k)\}$

$$x - y \in K \subseteq I \iff \bar{x} = \bar{y} \text{ in } \mathcal{P} \iff y \in I \text{ in } \mathcal{P} \iff y \in I \iff x \in y + I = I \subseteq$$
$$I \cdot f^{-1}(J) = \{x \in R : \bar{x} \in J\}$$

ergo $\bar{x} \in I/K \Leftrightarrow x \in I \Leftrightarrow \bar{x} \in J$

הכינוי שנתמנה ה'א חתם. גורו של' שותרת גורו

החומר: רמון. שטח ציור: 10 R/K. חם מוצר: I/A
עם KCIAR

פ'תגובות, שאלות ותשובות 1.4

$\varphi: (b \sim c \text{ ממש } a) \rightarrow a|b \rightarrow n/c$ ההפך
 $b = ac$ $c \mid b$ נכון נכון
 $\langle a \rangle = aR$ הפך נכון נכון

$$\langle b \rangle \subseteq \langle a \rangle \iff a \mid b \quad \text{12/20/21}$$

$\langle a \rangle$ קרא ערצ'לע און ער וויל זיך צו

$\langle X \rangle = \sum_{x \in X} R_x \rightarrow$ (NO) $X \subseteq R$ כל האיברים של R הם איברים של X

קבוצה, אולם $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ עם מספר סופי של איברים $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$
 * איברים שונים של אותו סוג הם איברים נפרדים. נקרא להם איברים
 חזרה: חלק נקרא חלק נפרד אם כל איבר הוא

נאמר $x \in R$ הוא חלק אפס אם קיים $y \neq 0$ כך $xy = 0$.

דוגמה: $2 \in \mathbb{Z}$ הוא חלק אפס מודולו 6
 $2 \cdot 3 = 0 \pmod{6}$

הערה: $0 \neq$ חלק אפס. חלק אפס שונה מאפס נקרא חלק אפס
 (הקצרה: חלק אפס)

תכונה: בתחומי חלק אפס $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ או $b = 0$
 $ab = ac \Rightarrow b = c$ $\forall a, b, c \in R$
 $a \neq 0$

פתרון: $a(b-c) = 0$ כיוון $a \neq 0$ חלק אפס
 $b-c = 0 \Leftrightarrow b=c$

הערה: $x \in R$ נקרא נילפוטנט אם קיים $n \geq 1$ כך $x^n = 0$.

* $R \neq 0$ בתור שנילפוטנטים הוא חלק אפס.

חלק אפס נילפוטנטים שונים מאפס נקרא חלק אפס
נילפוטנטים: $\text{nil}(R) = \{x \in R : \exists n \geq 1, x^n = 0\}$
 נקרא $\text{nil}(R)$ חלק אפס נילפוטנטים.

תהליך: $x, y \in \text{nil}(R) \Leftrightarrow x^n = 0, y^m = 0$ $n, m \geq 1$ כך 0
 $(x+y)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^i y^{n+m-i}$

"חלק אפס" אלה הם חלק אפס נילפוטנטים

$$x^i y^{n+m-i} = 0 \iff n+m-i \geq m \text{ if } i \geq n \text{ for } 0 \leq i \leq n+m$$

$$(x+y)^{n+m} = 0$$

הצגה חזרתית ומחזורית

חוג $\neq 0$ (קטן) תמיד שלמות. כל אופן מתחילי אלס
שונים מאלס.

הצגה: $R/\text{nil}(R) : R \neq 0$
 פתרון: $\bar{x} \in R/\text{nil}(R)$
 $\bar{x}^n = 0 \iff x^n \in \text{nil}(R) \iff x \in \text{nil}(R) \iff \bar{x} = 0$
 $x^m = (x^n)^m = 0$

הצגה: $x \in R$ איבר נקיט הפך (או יחידה) אם ורק אם
 $xy = 1$ ו- $yx = 1$ $y \in R$

$R^* = \{x \text{ הפך } x\}$ (קטן)

החבורה המכפלה של R ו- R חבורה ביחס מכפלה.

הצגה: $R^* = R \setminus \{0\}$ שדה אם ורק אם $R \neq 0$ חוג. התהליך:

1. R שדה

2. $I(R) = \{0\}$

3. $f \in \text{Hom}(R, S)$ ו- $f \neq 0$ f חוג.

חוכמה: $(2 \iff 1)$ אם $I \neq 0$ אז $I = R \iff R = \langle x \rangle \subseteq I \iff x \in R^* \iff$

(2 $\iff$ 3) $f \in \ker f = 0 \iff 1 \notin \ker f$ $f: R \rightarrow S$ נקיט
 (1 $\iff$ 3) $f \in \ker f = 0 \iff 1 \notin \ker f$ $f: R \rightarrow S$ נקיט
 $x \in R, x \neq 0$ הפך.

$\bar{x} = 0$: $\bar{x}$ is the image of x in $R/\langle x \rangle$ התמונה
 $3-8$: $\langle x \rangle \neq R$: $R/\langle x \rangle \neq 0$ אז

עליונות של R על $R/\langle x \rangle$ 1.5

אם R הוא $\mathbb{P}$ הכל
 אם $x \in \mathbb{P} \Leftrightarrow x \cdot y \in \mathbb{P}$: $\mathbb{P}$ הוא $\mathbb{P} \neq R$ אם
 $(x, y \in R)$: $y \in \mathbb{P}$

הכל $\mathbb{P} \subseteq R$: $\mathbb{P} \subseteq R$ הכל

$\text{Spec}(R) = \{ \mathbb{P} \triangleleft R : \mathbb{P} \text{ הוא } \mathbb{P} \}$ הכל
 $M \in R$: $M \triangleleft R$ הכל
 אם $I = M$: $M \subseteq I \subseteq R$ הכל
 $I = R$

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{P} \subseteq \mathbb{Z}$ הכל

$\text{Spec}(\mathbb{C}[x])$: $\mathbb{C}[x]$ הכל

$I \in \mathcal{I}(R)$: $R \neq 0$ הכל

אם $R/I \neq 0$: $I \in \mathcal{I}(R)$ הכל

אם $R/I = 0$: $I \in \mathcal{I}(R)$ הכל

(mod)

$x, y \in R$: $x, y \in R$ הכל

$x \in I \Leftrightarrow xy \in I$ הכל

$x \in I \Leftrightarrow xy \in I$ הכל

$\mathcal{I}(R/I) = \{ J \triangleleft R : I \subseteq J \}$ הכל

$\mathcal{I}(R/I) = \{ 0, R/I \}$ הכל

$\mathcal{I}(R/I) \Leftrightarrow \{ J \triangleleft R : I \subseteq J \} = \{ I, R \}$

מסקנה ב א' צ' ה' מקומות הם יהושע * (ההפך מן ה)

$0 \Leftrightarrow \inf R$ תחילת R $R \neq \emptyset$ $R \neq \emptyset$ $R \neq \emptyset$
 $0 \Leftrightarrow \inf R$ תחילת R $R \neq \emptyset$ $R \neq \emptyset$ $R \neq \emptyset$
 $0 \Leftrightarrow \inf R$ תחילת R $R \neq \emptyset$ $R \neq \emptyset$ $R \neq \emptyset$

$0 \leq 2Z \leq Z$ 00/00 1/100 1/100 1/100

$\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \cong \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p) \times \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}^{\text{unr}}/\mathbb{Q}^{\text{unr}})$

[illegible]

$J \in \mathbb{R}$ $J = \bigcup_{\alpha} J_{\alpha}$ where $\{J_{\alpha}\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{F}$ p/c

כי $J \neq 1$, J איננו פולינום
 והנחה זו היא סתירה.
 $N=M \subseteq I \subseteq M \cap N \neq R \neq I \subseteq M \neq R$
 $N=M$

$\text{SIN} \times R \text{ is not a R.F.O.}$

$\therefore \text{ergo}$, in $R \neq 0$ in Gödel
 $\text{in } R. 1$

2. בן 70 שנה נשוי לרעייתו מרים

3. $\frac{1}{2} \log \frac{1}{2}$ is the value of $\log \frac{1}{2}$.

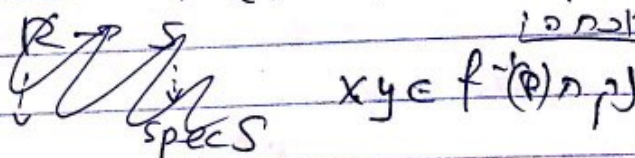
Für $I = \bigcup_{j=0}^{\infty} I_j$ für $\forall j \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{I} \leq \frac{1}{I_j}$
 Nach 2.3.1e $x_1, \dots, x_n \in I_j$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{I} \leq \frac{1}{I_j}$

$x_r \in I_{j_r}$ $\Rightarrow \exists j_r$ $1 \leq r \leq n$ SD
 $x_1, \dots, x_n \in I_j \subseteq \max\{j_1, \dots, j_n\} = j$ NP
 $I \subseteq I_j \subseteq \dots \subseteq I$ P

$F = \{I\} : \exists \in 2$
 $I_1, I_2 \in F$ NP SD
 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq F$ SD
 $I_1 \not\subseteq I_2 \not\subseteq F$ SD

$F = \{I \subseteq R : I \subseteq 3\}$
 $J = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ NP
 $J = I$ SD
 $J \subseteq \langle J, x \rangle \subseteq I$ SD
 J SD

$f: R \rightarrow S$ SD
 $f^*(P) = f^{-1}(P)$ SD
 $f^*(P) = f^{-1}(P)$ SD



$f(x) \cdot f(y) = f(xy) \in P$ $\Leftarrow$
 $f(y) \in P$ $\text{if } f(x) \in P$ $\Leftarrow$
 $y \in f^{-1}(P)$ $\text{if } x \in f^{-1}(P)$ $\Leftarrow$

SD

1. תרגיל

הוכח: $f: A \rightarrow B$ יחידה f (1)

$\forall g, h: B \rightarrow C$ אם $f \circ g = f \circ h$ אז $g = h$

$$f \circ h = f \circ g \Rightarrow h = g$$

$$\forall g, h: C \rightarrow A, h \circ f = g \circ f \Rightarrow h = g$$

הוכח: $f: A \rightarrow B$ מונומורפית (2)

$g \circ f = id_A$ אם $g: B \rightarrow A$ אז f מונומורפית (3)

$$f \circ g = id_B \text{ אם } g: B \rightarrow A$$

$$f \circ g = id_B \Leftrightarrow f \text{ מונומורפית}$$

הוכח: $f(x) = f(y)$ אם $x \sim y$ ו- f מונומורפית

$$x \sim y$$

$$h, g: \mathbb{Z}[x] \rightarrow A, x \neq y$$

$$f \circ h = f \circ g \text{ אז } h = g$$

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \text{ מונומורפית}$$

$$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n \text{ מונומורפית}$$

$$\mathbb{Z}/p^2 \rightarrow \mathbb{Z}/p$$

$$nil(R) = \sqrt{0} = \bigcap_{P \in Spec R} P$$

$$1-x \in R^* \text{ אם } x \in nil(R) \text{ (1)}$$

$$a+x \in R^* \text{ אם } a \in R^* \text{ ו- } x \in nil(R) \text{ (2)}$$

$$(1-x)(1+x+\dots+x^{n-1}) = 1 \text{ אם } x^n = 0$$

$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = f \in R[x]$ in R is a unit $\Leftrightarrow$ $a_0 \in R^\times$ (1) if and only if

$\text{Nil}(R) \ni a_i, i > 0$ $\forall i, a_i \in \text{Nil}(R) \Leftrightarrow f \in \text{Nil}(R[x])$ (2)

$\exists b \in R, b \cdot f = 0 \Leftrightarrow 0$ (3)

$f \text{ is a unit} \Leftrightarrow \exists g \in R[x] \text{ s.t. } f \cdot g = 1$ (4)

$\langle a_0, a_1, \dots, a_n \rangle = \langle 1 \rangle$ in R is a unit

$f \cdot g = 1$ $\Rightarrow$ f is a unit in $R[x]$ (1) if and only if

$a_n b_m = 0, a_0 b_0 = 1$ s.t. $g = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ $\Leftrightarrow$

$\forall 0 \leq r \leq m, a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$ if and only if

$\forall 0 \leq r \leq m, a_n^{r+1} b_{m-r} = 0$

$$f \cdot g = c_0 + c_1x + \dots + c_{m+n}x^{m+n}$$

$$0 = c_{m+n} = \sum_{j=0}^r a_{n-j} b_{m-r+j} \cdot a_n^r$$

$$0 = a_n^{r+1} \cdot b_m + \sum_{j=1}^r a_{n-j} \underbrace{(a_n^{r-j+1} b_{m-r+j})}_0 \cdot a_n^{j-1}$$

$$a_n^{r+1} \cdot b_m = 0 \quad \text{for } r=m$$

$a_n x^n \in \text{Nil}(R[x])$ if $a_n \in \text{Nil}(R)$ if and only if

$f = a_n x^n \in (R[x])^\times$ if and only if

f is a unit in $R[x]$ $\Rightarrow$ f is a unit in R

$P[x] \in \text{Spec}(R[x])$ $\Leftrightarrow P \in \text{Spec}(R)$ if and only if

$\varphi: R[x] \rightarrow (R/P)[x]$ if and only if

$\ker \varphi = P[x]$ if and only if

$$\text{Nil}(R[x]) = \bigcap_{g \in \text{Spec } R[x]} g = \text{Nil}(R)[x] \quad \text{if } f \neq 0$$

$$= \bigcap_{P \in \text{Spec } R} (P[x]) = \left(\bigcap_{P \in \text{Spec } R} P \right)[x] = 0[x] = 0$$

$$\{g \in R[x] \mid g \cdot f = 0\} \quad \text{if } f \neq 0$$

$$b_m f = 0 \Rightarrow \text{if } b_m \neq 0, \text{ then } b_m f = 0 \Rightarrow a_n b_m = 0 \Rightarrow a_n g = 0$$

$$\deg(g) > \deg(a_n g) \Rightarrow a_n g = 0 \Rightarrow (a_n g) f = 0$$

$$\forall 0 \leq r \leq n \quad a_{n-r} g = 0$$

$$\forall i, j \quad a_i b_j = 0$$

$$\forall i \quad b_m a_i = 0$$

$$\forall r=0 \quad \text{if } b_m a_i = 0$$

$$0 = c_{m+n-r} = \sum_{j=0}^{m+n-r} a_{n-j} b_{m+j-r} = a_{n-r} b_m$$

$$\deg(a_{n-r} g) < \deg(g) \quad \text{if } a_{n-r} g f = 0 \Rightarrow a_{n-r} g = 0$$

$$\text{if } f \neq 0, \text{ then } f \cdot g = 0 \Rightarrow f \cdot g = 0 \quad (4)$$

$$\text{if } f \neq 0, \text{ then } f \cdot g = 0$$

$$R/M \text{ is a field, } M \triangleleft R, \text{ then } (R/M)[x]$$

$$f \cdot g \neq 0 \in (R/M)[x] \Leftrightarrow f, g \neq 0 \in (R/M)[x] \Leftrightarrow f, g \notin M[x]$$

$$f \cdot g \notin M[x]$$

$$\text{if } f \cdot g \notin M[x] \Rightarrow f, g \notin M[x]$$