שיעור 4 - שבוע 3 - 28.10.18

<u>טענה</u> $nil(R)=\bigcap_{P\in Spec R} P$

<u>הוכחה:</u> $x\in nil(R)$ כלומר $\exists n\ x^n=0 \Leftarrow \forall P\in Spec R\ x^n\in P$

$\Downarrow$

מראשוניות של P נקבל $x\in P$ ולכן x נמצא בכל P ראשוני

$\Rightarrow nil(R)\subseteq \bigcap_{P\in Spec R} P$

כיוון שני:

נקח x שאינו נילפוטנטי, נסתכל על משפחת האידיאלים $\mathcal{F}=\{I\}$ כך ש- $x^n\notin I$ לכל n. נקח $P\in\mathcal{F}$ (*) מקסימלי במשפחה (צורן). נראה להשלים ש- P ראשוני: יהיו $a,b\notin P$ נראה $ab\notin P$. האידיאלים $P+aR$, $P+bR$ מכילים ממש את P

לכן $x\in P+aR$

$\exists n\ x^n\in P+aR$, $\exists m\ x^m\in P+bR$, $x^{n+m}\in P+abR$

$\Downarrow$

$P+abR\notin\mathcal{F} \Rightarrow P\neq P+abR \Rightarrow ab\notin P$ כנדרש.

<u>הגדרה:</u> הרדיקל של ג'קובסון מוגדר ע"י $J(R)=\bigcap_{M \text{ אידיאל מקסימלי}} M$

בפרט $J(R)\supseteq nil(R)$

<u>טענה:</u> יהי $R\neq 0$ חוג, ו- $x\in R$.

$x\in J(R) \iff 1-xy\in R^*$ לכל $y\in R$

(תזכורת: אילו x נילפוטנטי, $1-x$ הפיך. אין צורך בהכרח פורמלי "$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots$" אם x נילפוטנטי "$\frac{1}{1-x}=1+x+\dots+x^n$" וזה מדויק. כלומר: $x^{n+1}=0$ ו- $(1-x)(1+x+\dots+x^n)=1-x^{n+1}=1$.)

(*) האוסף אינו ריק כי x אינו נילפוטנטי.

הוכחת הטענה: $(\Leftarrow)$ $x\in J(R)$ ונניח בשלילה שקיים $y\in R$ כך ש- $1-xy$ לא הפיך. $\Leftarrow$ קיים אידאל מקסימלי M כך ש- $1-xy\in M$ אבל גם $x\in M$ ולכן גם $xy\in M$
ואז $1=(1-xy)+xy\in M$ סתירה לכך ש-M נאות.

$(\Rightarrow)$ נניח ש- $1-xy$ הפיך לכל $y\in R$. נניח בשלילה ש- $x\notin J(R)$

$\Leftarrow$ קיים M מקסימלי כך ש- $x\notin M$ $\Leftarrow$ $M\subsetneq M+xR$ ממקסימליות של M $M+xR=R$.
בפרט $1=m+xy$ עבור $y\in R$, $m\in M$.

$\underbrace{1-xy}_{\text{הפיך}}=m\in M \Rightarrow M=R$ סתירה לנאותות של M.

<u>הגדרה</u>: חוג R נקרא חוג מקומי אם יש לו אידאל מקסימלי יחיד M, נסמן: (R,M).

<u>דוגמאות</u>: $\mathbb{C}[x]_{\langle x\rangle}=\{\frac{f}{g}: g(0)\neq 0\}$
זה חוג מקומי, והאידאל המקסימלי היחיד שלו הוא $x\mathbb{C}[x]_{\langle x\rangle}$

<u>דוגמה אנליטית</u>: $R=Hol(\mathbb{C})$ $R_{x=0}=\{\sum_{i=0}^{\infty}a_ix^i$ מתכנס$\}$

$=\{\sum_{i=0}^{\infty}a_iz^i$ מתכנס ב-$\mathbb{C}\}$

$\mathbb{C}\subsetneq R_{x=0}=\{$טורי טיילור שמתכנסים בסביבת $0\}$

<u>דוגמא דיפרנציאלית</u>

<u>טענה</u>: 1) יהי $R\neq 0$ חוג ו- M אידאל נאות כך ש- $R-M\subseteq R^{\times}$ אז (R,M) הוא חוג מקומי.

2) יהי $R\neq 0$ חוג ו- M מקסימלי, נניח ש- $1+M\subseteq R^{\times}$ כלומר $1+x\in R^{\times}$ לכל $x\in M$.
אז (R,M) מקומי.

<u>הוכחה:</u> 1) אם I אידיאל נילי, אז כל $x\in I$ לפי תרגיל, אז $x\in M$ ולכן M מקסימלי יחיד.

2) נניח $x\in M$ אז לכל $x\in R$ גם $xy\in M$ ⇐ $1+xy$ הפיך לפי ההנחה. ⇐ $x\in J(R)$ ולכן $M\subseteq J(R)$
ולכן $J(R)\subseteq M$ ⇐ $M=J(R)=\bigcap N$
N מקסימלי
⇐ $N\subseteq M$ לכל N מקסימלי ⇐ $N=M$ לכל מקסימלי.

<u>השלמה:</u> פעולה נוספת על אידיאלים: היה לנו
$I+J$ האידיאל הכי קטן שמכיל את שניהם.
$I\cap J$ האידיאל הכי גדול שמוכל בחיתוך.
$I*J = \langle xy : x\in I, y\in J\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i : x_i\in I, y_i\in J, n\geq 0\right\}$

<u>באופן דומה:</u> נגדיר מכפלה ~~לכל~~ סופית של אידיאלים.
$I_1\cdots I_m = \langle x_1\cdots x_m \mid x_i\in I_i\rangle = \left\{\sum_{j\in A} x_{1_j}\cdots x_{m_j} : x_{i_j}\in I_i\right\}$

$$I\cdot J\subseteq I\cap J\subseteq I,J\subseteq I+J$$

$R=\mathbb{Z}$, $I=\langle a\rangle$, $J=\langle b\rangle$, $I\cdot J=\langle ab\rangle$

$I+J=\langle \gcd(a,b)\rangle$, $I\cap J=\langle \mathrm{lcm}(a,b)\rangle$

$2\mathbb{Z}\cdot 2\mathbb{Z}=4\mathbb{Z}$

$2\mathbb{Z}\cap 2\mathbb{Z}=2\mathbb{Z}$

Scanned with CamScanner