טופולוגיה אלגברית - הרצאה 9

סדרות מדויקות:

<u>הגדרה:</u> $A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C$ (חבורות), סדרה כזו מדויקת ב-B אם $Im\alpha = Ker\beta$.

$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ מדויקת $\Leftrightarrow$ α איזומורפיזם.

$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ נקראות סדרה מדויקת קצרה. כלומר α חח"ע, β על

! $C \cong B/\alpha(A)$ (β משרה איזומורפיזם).

<u>הגדרה:</u> סדרה מדויקת של קומפלקסים שר.

$$0 \to C'_* \xrightarrow{\alpha_\#} C_* \xrightarrow{\beta_\#} C''_* \to 0$$

כאשר יש סדרה מדויקת בכל מימד.

$$\cdot\ \alpha_*: H_q(C'_*) \to H_q(C_*)$$

$$\cdot\ \beta_*: H_q(C_*) \to H_q(C''_*)$$

<u>משפט:</u> קיים הומומורפיזם $\partial_*: H_q(C''_*) \to H_q(C'_*)$ כך ש:

$$\begin{array}{l} \to H_q(C'_*) \xrightarrow{\alpha_*} H_q(C_*) \xrightarrow{\beta_*} H_q(C''_*) \\ \qquad\qquad\qquad \downarrow \partial_* \\ H_{q-1}(C'_*) \xrightarrow{\alpha_*} H_{q-1}(C_*) \xrightarrow{\beta_*} H_{q-1}(C''_*) \\ \qquad \vdots \\ \qquad \downarrow \\ H_0(C'_*) \xrightarrow{\alpha_*} H_0(C_*) \xrightarrow{\beta_*} H_0(C''_*) \end{array}$$

מדויקת.

<u>הוכחה:</u> בדיוק כמו Snake lemma (ע"י מקדונלד, פרק 2).

"הנוסחא": $\partial(\delta'')=\alpha_{q-1}^{-1}\partial_q\beta_q^{-1}(\delta'')$

הומולוגיה יחסית

(X,A) זוג טופולוגי $(A\subseteq X)$. $0\to C_q(A)\hookrightarrow C_q(X)$. נגדיר את $C_q(X)\twoheadrightarrow C_q(X,A)$

כך שנקבל סדרה מדויקת קצרה, כלומר $C_q(X,A)=\dfrac{C_q(X)}{C_q(A)}$. נגדיר $\partial_q: C_q(X,A)\to C_{q-1}(X,A)$

ע"י $[c]\longmapsto[\partial_q(c)]$, בוודאי מוגדר היטב.

משפט:

(1) $C_*(X,A)$ כן קומפלקס שרשראות.

(2) $0\to C_*(A)\xrightarrow{in_\#}C_*(X)\xrightarrow{\pi}C_*(X,A)\to 0$ סדרה מדויקת קצרה.

(3) סדרה מדויקת ארוכה הומולוגית:

$$\begin{tikzcd} H_q(A) \arrow[r] & H_q(X) \arrow[r] & H_q(X,A) \arrow[dll, "\partial_*"] \\ H_{q-1}(A) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

הוכחה: תרגיל.

הערה: פעולה של ∂_*:

$$[c]\in H_q(X,A)\qquad \partial_q(c)\in C_{q-1}(A)\qquad \mapsto [a]\in H_{q-1}(A)$$
$$c\in Z_q(X,A)\qquad \overset{\shortparallel}{a}.\quad \partial_{q-1}(A)=0$$

דוגמאות:

- $A\subseteq X$ קשירים מסילתית, אז $H_0(X,A)=0$ (כי $H_0(X)\simeq H_0(A)$).

- $x_0\in X$, אז $H_q(X,x_0)\simeq\tilde{H}_q(X)$. אם $q>1$ אז

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[d, equal] & & \\ H_q(pt) \arrow[r] & H_q(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & H_q(X,x_0) \arrow[dr] & \\ & \tilde{H}_q(X) & & H_{q-1}(pt) \arrow[d, equal] \\ & & & 0 \end{tikzcd}$$

ב-$q=1$:

$$\begin{tikzcd} H_1(pt) \arrow[r] & H_1(X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & H_1(X,x_0) \arrow[r] \arrow[dr] & H_0(x_0) \arrow[r, hook] & H_0(X) \\ & \tilde{H}_1(X) & & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

$q=0$:

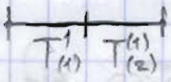
$$0\longrightarrow H_0(x_0)\hookrightarrow H_0(X)\longrightarrow H_0(X,x_0)\longrightarrow 0$$
$$H_0(X,x_0)\simeq {H_0(X)}/{\mathbb{Z}}$$

(2) יש להראות $H_q(X,A)\simeq H_q(X\cup ConA, ConA)$, הוא יהיה מושרה ע"י שיכון.

<u>טענה 1</u> נגדיר $\beta: C_q(X)\to C_q(X)$ (חלוקה בריצנטרית).

$$\beta(f: T^q\to X) := \sum f_i$$

אז β, Id הומוטופיות שרשראות.



$T^1_{(1)}\quad T^{(1)}_{(2)}$

$$T^1 \mapsto T^1_{(1)} + T^1_{(2)}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow$$

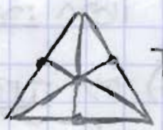
$$T^1 \qquad T^1$$

כך שבשפה האמצע ומצטמצם

$\beta(T^1)$

$$:\pm D(T^1)\in C_2(X)$$

$T^1\times I$



$$T^2 + \sum_6 T^2_{(6)}$$

כך שתוך שבפנים יצטמצמו בשפה.

$: D(T^q)$

כמסקנה: $\beta_* = Id: H_*(X)\to H_*(X)$

<u>טענה 2</u> יהי $\{U_\alpha\}$ כיסוי פתוח של X. נגדיר: $C_q(X)\supset C_q^{\hat{U}} := \sum_\alpha C_q(U_\alpha)$.

אז:

- $C_*^{\hat{U}}(X)$ ק"ש.
- $H_q(C_*^{\hat{U}}(X))\simeq H_q(X)$

<u>הוכחה:</u> $in: C_q^{\hat{U}}(X)\to C_q(X)$ וזה נותן $in_*: H_q^{\hat{U}}(X)\to H_q(X)$.

(1) לכל $c\in C_q(X)$ קיים n כך ש $\beta^n(c)\in C_q^{\hat{U}}(X)$.

(2) in_* על. והוא $H_q(C_*^{\hat{U}}(X))\ni[\beta^n(c)] = [c]\in H_q(X)$

(3) in_* חח"ע: נניח $[\sigma]\in H_q^{\hat{U}}(X)$, אז $\sigma=\partial c$ ל $c\in C_{q+1}(X)$, אזי $\beta^n(c)\in C_{q+1}^{\hat{U}}(X)$

אזי $c-\beta^n(c)=\partial(\tilde{c})$ ולכן $[\sigma]=[\partial_{q+1}\beta^n(c)\pm\partial^2\tilde{c}]=$

$=[\partial_{q+1}\beta^n(c)]=0\in H_q^{\hat{U}}(X)$

<u>חזרה להוכחה:</u>

נגדיר כיסוי פתוח של $X\cup ConA$: $\hat{U}=\{\overset{U_1}{X\cup Con(A)\setminus\frac{1}{2}ConA}, \overset{U_2}{ConA\setminus A}\}$. אז:

$$H_q(X\cup ConA, ConA)\simeq H_q^{\hat{U}}(X\cup ConA, ConA) \simeq$$

$$C_q^{\hat{U}}(X\cup Con(A), ConA) = C_q^{\hat{U}}(X\cup ConA)/C_q^{\hat{U}}(ConA) = \frac{C_q(U_1)+C_q(U_2)}{C_q(\tilde{U_1})+C_q(U_2)}\simeq$$

$$\simeq C_q(X\cup ConA\setminus\tfrac{1}{2}ConA, ConA-\tfrac{1}{2}ConA)$$

• $f:(X,A)\to(Y,B)$ אז יש $f_\#: C_*(X,A)\to C_*(Y,B)$ ו $f_*: H_*(X,A)\to H_*(Y,B)$,
$f(A)\subset B$

משפט: $B\subset A\subset X$, יש (X,A); (X,B), (A,B):

$$(A,B)\xhookrightarrow{in}(X,B)\xrightarrow{rel}(X,A)$$

אז הסדרה:
$$0\to C_*(A,B)\xrightarrow{in_*} C_*(X,B)\xrightarrow{rel_*} C_*(X,A)\to 0$$
מדויקת.

הוכחה: תרגיל

מסקנה: תהי $f:(X,A)\to(Y,B)$ העתקה:
- $f:X\to Y$ שקילות הומוטופית.
- $f|_A:A\to B$ שקילות הומוטופית.

אזי $f_*:H_q(X,A)\xrightarrow{\cong} H_q(Y,B)$.

הוכחה: נובע מלמה של 5 איזומורפיזמים.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\to & H_q(A) & \to & H_q(X) & \to & H_q(X,A) & \to & H_{q-1}(A) & \to & H_{q-1}(X) & \to \dots \\
 & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\
\to & H_q(B) & \to & H_q(Y) & \to & H_q(Y,B) & \to & H_{q-1}(B) & \to & H_{q-1}(Y) &
\end{array}$$

הומולוגיה יחסית והומולוגיה אבסולוטית

משפט:

(1) אם (X,A) זוג בורסוק, אז יש $p:(X,A)\to(X/A,[A])$ הטלה, p משרה איזומורפיזם $p_*:H_q(X,A)\xrightarrow{\cong} H_q(X/A,[A])\simeq\tilde{H}_q(X/A)$

(2) אם (X,A) זוג כללי, $in:X\to X\cup Con(A)$ משרה איזומורפיזם:
$$H_q(X,A)\xrightarrow{\cong}\tilde{H}_q(X\cup Con(A))\simeq H_q(X\cup Con A,v)$$
קודקוד

הוכחה: אם (X,A) זוג בורסוק
(2) ⇐ (1) כי $(X\cup Con(A), Con(A))$ זוג בורסוק:
$$X\cup Con(A)\overset{h}{\simeq} X\cup Con(A)/_{Con(A)} = X/A$$

$$\cong H_q(X\cup \mathrm{Con}A\setminus \tfrac{1}{2}\mathrm{Con}A,\ \mathrm{Con}(A)\setminus \tfrac{1}{2}\mathrm{Con}A) \underset{\substack{\text{רטרקציה}\\ \text{דפורמציונית}}}{\cong} H_q(X,A).\ \blacksquare$$

<u>משפט גזירה:</u>

תהי $B\subset A\subset X$ שלשית טופולוגית. נניח שמתקיים אחד מהבאים:

- $\bar{B}\subset \mathrm{Int}(A)$
- (X,A) ו-$(X\setminus B, A\setminus B)$ זוגות B. ו-$X/A = {}^{X\setminus B}/_{A\setminus B}$.

אזי: $i_*: H_q(X\setminus B, A\setminus B) \xrightarrow{\sim} H_q(X,A)$ הוא איזומורפיזם.

<u>הוכחה:</u>

במקרה השני $H_q(X,A)\cong \tilde{H}_q(X/A)$ ו-$H_q(X\setminus B, A\setminus B)\cong H_q\left(\frac{X\setminus B}{A\setminus B}\right)$

במקרה הראשון: $\hat{\mathcal{U}} = \{\underbrace{\mathrm{Int}A}_{U}, \underbrace{X\setminus \bar{B}}_{V}\}$.

$$H_q(X,A)\cong H_q^{\hat{\mathcal{U}}}(X,A)$$

$$H_q(X\setminus B, A\setminus B)\cong H_q^{(U\setminus B, V\setminus B)}(X\setminus B, A\setminus B)$$

$$C_q^{(U,V)}(X,A) = \frac{C_q^{(U,V)}(X)}{C_q^{(U,V)}(A)} = \frac{C_q(U)+C_q(V)}{C_q(U)+C_q(V\cap A)} \cong \frac{C_q(V)}{C_q(V\cap A)}$$

$$C_q^{(U\setminus B, V\setminus B)}(X\setminus B, A\setminus B) = \frac{C_q(U\setminus B)+C_q(V)}{C_q(U\setminus B)+C_q(V\cap A)} \cong \frac{C_q(V)}{C_q(V\cap A)}\ \blacksquare$$