טופולוגיה אלגברית - הרצאה 8

<u>הגדרה:</u> תהי חבורה G פועלת על Y. הפעולה נקראת דיסקרטית ממש אם לכל $y\in Y$ יש סביבה U כך ש $g_1U\cap g_2U=\emptyset$ לכל $g_1,g_2\in G$.

<u>דוגמא:</u> $Aut(\tilde{X}\to X)$ פועלת על $\tilde{X}$ בצורה דיסקרטית ממש.

<u>משפט:</u>

(1) אם G פועלת בY בצורה דיסקרטית ממש, אזי $p:Y\to Y/G$ כיסוי נורמלי.
אם Y קשיר מסילתית $G\simeq Aut(Y\to Y/G)$.

(2) אם $p:\tilde{X}\to X$ כיסוי נורמלי, אזי $X=\tilde{X}/G$, $G=Aut(\tilde{X}\to X)$.

<u>הוכחה:</u>

(1) $p:Y\to Y/G$ כיסוי. נגדיר $\tilde{U}=p(gU)$, $p^{-1}(\tilde{U})=\bigcup_{g\in G}gU$. G פועלת טרנזיטיבית בכל סיב, $G\simeq Aut(Y\to Y/G)$ דורש למה מעבר.

<u>דוגמא:</u> אם $\pi_1(Y)=0$, $G\curvearrowright Y$ באופן דיסקרטי ממש, אזי $\pi_1(Y/G)\simeq G$.

<u>דוגמאות:</u>

(1) $p:S^n\xrightarrow{2}\mathbb{R}P^n$, לכן $\pi_1(\mathbb{R}P^n)=\mathbb{Z}_2$.

(2) S^{2k-1}, $G=\mathbb{Z}_m$. $v\in S^{2k-1}$, נרשום אותו כ k קואורדינטות מרוכבות $(v_1,\dots,v_k)$.
$g=e^{2\pi i\frac{s}{m}}$, $gv:=(e^{2\pi i\frac{s}{m}}v_1,\dots,e^{2\pi i\frac{s}{m}}v_k)$. זו פעולה דיסקרטית ממש.

$S^{2k-1}/\mathbb{Z}_m\simeq L_m^{2k-1}$ מרחב עדשה (Lens space).

(3) $T^2=S^1\times S^1$, יש $p:\mathbb{R}^2\to T^2$ $(T^2\simeq\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$. לכן $\pi_1(T^2)=\mathbb{Z}^2$.
$\underset{g\geq 2}{S^2\#gT^2}$. יש כיסוי $B^2\xrightarrow{\Gamma}S^2\#gT^2$, $\Gamma\simeq\pi_1(S^2\#gT^2)$ חבורה דיסקרטית של איזומטריות היפרבוליות.

תורת הומולוגיה

הומולוגיה סינגולרית

הגדרה: סימפלקס סטנדרטי. $T^q := \{(t_0,\dots,t_q)\in\mathbb{R}^{q+1} : \forall i\ t_i\geq 0,\ \sum_i t_i = 1\}$

כלומר הקמור של $e_0,\dots,e_q$.

הגדרה: סימפלקס סינגולרי ב-X: $f:T^q\to X$ העתקה רציפה.

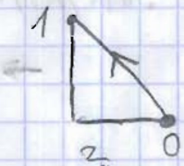
הגדרה: שרשרת q ממדית ב-X: $\sum m_i f_i$ סופי פורמלי, $m_i\in\mathbb{Z}$ ו-$f_i:T^q\to X$.

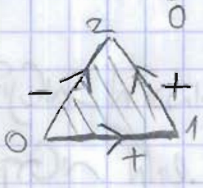
$C_q(X)$ - אוסף השרשראות q ממדיות. זו חבורה אבלית נוצרת חופשית ע"י כל הסימפלקסים ה-q ממדיים.

הגדרה: הומומורפיזם שפה: $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$. ל-$f:T^q\to X$ $\partial_q(f) := \sum_{i=0}^{q}(-1)^i f_i$

$$\begin{array}{ccc} f: T^q & \longrightarrow & X \\ \uparrow \varphi_i & \nearrow f_i & \\ T^{q-1} & & \end{array}$$

$\varphi_i(t_0,\dots,t_{q-1}) = (t_0,\dots,\overset{i}{0},\dots,t_{q-1})$.

$q=1$:  $\partial f = f(1) - f(0)$

$q=2$: 

משפט: $\partial^2 = \partial_{q-1}\partial_q = 0$

הוכחה: מספיק לבדוק עבור $f:T^q\to X$. $\partial_q(f)=\sum_{i=0}^{q}(-1)^i f_i$, לכן:

טענה: כל פאה $q-2$ ממדית מופיעה בסכום פעמיים. נגיד $i<j$ $(\dots,\overset{i}{0},\dots,\overset{j}{0},\dots)$

פעם ראשונה בתור מחובר ב-$\partial_{q-1}(f_i)$, פעם שניה ב-$\partial_{q-2}(f_j)$.

טענה: היא תופיע עם סימנים נגדיים.

$(i,j) - (-1)^i\cdot(-1)^{j-1}$. $(j,i) - (-1)^j\cdot(-1)^i$.

זה מספיק.

תזכורת:

$$\dots \to C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \to \dots \to 0$$

בסדרה זו: $\underbrace{B_q}_{\text{שפות q ממדיות}} := \mathrm{Im}\,\partial_{q+1} \subset \mathrm{Ker}\,\partial_q := \underbrace{Z_q}_{\text{ציקלוסים q ממדיים}}$

הגדרה: $H_q(X) := Z_q/B_q$, החבורה ההומולוגית הסינגולרית q ממדית.

לפעמים רושמים $H_*(X)=\bigoplus_{q\ge 0} H_q$. כל ה H_q אבליות.

קומפלקס שרשראות:

הגדרה: קיימת סדרה של חבורות אבליות עם הומומורפיזמים:

$$C_* : (\to C_{q+1} \to C_q \to C_{q-1} \to \dots \to C_0 \to 0)$$

כך ש $\partial_{q+1}\partial_q = \partial^2 = 0$.

קיים מורחב - כשבין C_0 ל 0 יש את $\mathbb{Z}$. נסמן ב $\tilde{C}_*$.

הגדרה: $H_q(C_*) := \frac{\mathrm{Ker}\,\partial_q}{\mathrm{Im}\,\partial_{q+1}} = \frac{Z_q}{B_q}$. $H_q(\tilde{C}_*) = \tilde{H}_q(C_*)$, ל $q>0$ אין לא שינוי, ב0 יש הבדל.

דוגמא: $C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$, $\sum m_i p_i \mapsto \sum m_i$.

הגדרה: העתקה שרשראות. $C_* \xrightarrow{\varphi} C'_*$ אוסף הומומורפיזמים:

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{q+1}"] & C_q \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_q"] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{q-1}"] & \dots \arrow[r] & C_0 \arrow[r] & C_0 \\
\arrow[r] & C'_{q+1} \arrow[r] & C'_q \arrow[r] & C'_{q-1} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & C'_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

כך של ריבוע מתחלף: $\partial'_q \varphi_q = \varphi_{q-1}\partial_q$.

דוגמא: $f: X \to Y$, $f_*: C(X) \to C(Y)$, ע"י $(\sigma: T^q \to X) \mapsto (f\circ\sigma : T^q \to Y)$.

זה פונקטור (הראינו) $\mathrm{Top} \mapsto \mathrm{ChCo}$.

יש פונקטור $\mathrm{ChCo} \mapsto \mathrm{AbGr}$ העתקה $\varphi: C_* \to C'_*$ מעבירים ל $C_* \to H_*$ ל $\varphi_*: H_*(C_*) \to H_*(C'_*)$ לפי ההגדרה הבאה:

הגדרה: $[c] = \alpha \in H_q(C_*)$

$$\Downarrow$$

$$[\varphi_q(c)] \in H_q(C'_*)$$

<u>למה:</u> φ_* מוגדר היטב:

- $\partial'_q\varphi_q(c)=\varphi_{q-1}\partial_q(c)=0$, לכן $\varphi_q(c)$ מעגל.
- אם $c_1=c+\partial_{q+1}(d)$, $\varphi_q(c_1)=\varphi_q(c)+\varphi_q\partial_{q+1}(d)=$
$$=\varphi_q(c)+\partial'_{q+1}(\varphi_{q+1}(d)$$

<u>מסקנה:</u> קיבלנו פונקטור $Top\to AbGr$.

<u>הגדרה:</u> (הומוטופיה שרשראות)

$\varphi,\psi: C_*\to C'_*$ נקראות הומוטופיות אם קיימת הומוטופיה שרשראות;

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & C_{q+1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \arrow[d, shift left, "\psi"] & C_q \arrow[r, "\partial_q"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \arrow[d, shift left, "\psi"] \arrow[dl, "D_q"'] & C_{q-1} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \arrow[d, shift left, "\psi"] \arrow[dl, "D_{q-1}"'] & {} \\
\arrow[r] & C'_{q+1} \arrow[r, "\partial'_{q+1}"'] & C'_q \arrow[r] & C'_{q-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

כך ש: $\psi-\varphi=D_{q-1}\partial_q+\partial'_{q+1}D_q$

<u>משפט:</u> אם $\psi\sim\varphi: C_*\to C'_*$ אז $\psi_*=\varphi_*$.

<u>הוכחה:</u> $(\psi_*-\varphi_*)(\alpha)=[(D_{q-1}\partial_q+\partial'_{q+1}D_q)(c)]=[\partial'_{q+1}D_q(c)]=0$

$$\underset{\substack{\parallel \\ [c]}}{\alpha}\in H_q(C_*)$$

<u>משפט:</u> יהיו $f\overset{h}{\sim}g: X\to Y$. אז $f_\#\sim g_\#: C_*(X)\to C_*(Y)$ ולכן מגדירות אותו הומומורפיזם $H_*(X)\to H_*(Y)$.

<u>הוכחה:</u> נגדיר $H: X\times I\longrightarrow Y$ הומוטופיה. נקח $(\sigma: T^q\to X)\in C_q(X)$ ונבנה $D_q(\sigma)\in C_{q+1}(Y)$. נקח $H\circ(\sigma\times 1): \underset{\substack{\parallel \\ \bigcup T_i^{q+1}}}{T^q\times I}\to Y$.

$$T_i^{q+1}:=\{(t_0,\dots,t_q,\tau): t_0+\dots+t_{i-1}\leq\tau\leq t_0+\dots+t_i\}=$$
$$=Conv(e_0,\dots,e_i,e'_i,\dots,e'_q)$$

קודקודים יחד.

אז $T^q\times I=\bigcup_{i=0}^{q}T_i^{q+1}$, $\mathrm{Int}\,T_i^{q+1}\cap\mathrm{Int}\,T_j^{q+1}=\emptyset$. יש $T^{q+1}_{f_0,\dots,f_{q+1}}\xrightarrow{\lambda_i}T_i^{q+1}$.

- $D_q(\sigma):=(-1)^q\sum_{i=0}^{q}(-1)^i H\circ(\sigma\times Id)\circ\lambda_i$

$\boxed{\text{תרגיל סופר חשוב}}$

רק לבדוק ש $g_\#-f_\#=\underbrace{\partial'_{q+1}D_q}_{\text{פאות פנימיות מצטמצמות, נקבל שפה של } T^q\times I}+\underbrace{D_{q-1}\partial_q}_{\text{חלק צדדי של שפה}}$.

מסקנה: אם X, Y שקולים הומוטופית, אז $f_*: H_*(X) \to H_*(Y)$ איזומורפיזם.

דוגמאות:

(1) $X = pt$. אז לכל q $C_q(X) \simeq \mathbb{Z}$.

$C(X): \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \dots$

$\tilde{C}(X): \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \dots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$

לכן: $\partial_q(f_q) = \begin{cases} 0 & q \equiv 1(2) \\ f_{q-1} & q \equiv 0(2) \end{cases}$

ל $q>0$ $H_q(pt) = 0$, $H_0(pt) = \mathbb{Z}$.

אזי $\tilde{H}_q(pt) = 0$ לכל q.

אם X כוויץ, כבר חישבנו את ההומולוגיה שלו.

(2)

א. X קשיר מסילתית, אז $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$.

ב. X כללי, אז $H_0(X) \simeq \bigoplus_{\substack{\text{רכיבי} \\ \text{קשירות} \\ \text{מסילתית}}} \mathbb{Z}$

ג. $\tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z} \simeq H_0(X)$.