



אחר השוואה:

$$(\bar{z}_{i,j+1} \cdot p_{i,j+1}^{i+1,j+1} \cdot \bar{z}_{i+1,j+1}) \cdot (\bar{z}_{i+1,j+1} \cdot p_{i+1,j+1}^{i+1,j+1} \cdot \bar{z}_{i+1,j+1}) \quad (*)$$

$\downarrow$ $A_{i,j+1}$ $\downarrow$ $\Phi_1(A_{i,j})$ $\downarrow$ $\Phi_1(A_{i,j})$

נציב מסלול חדש $\bar{z}'_{i,j} : [0,1] \rightarrow A_{i,j-1} \cap A_{i,j}$

$$(*) \rightarrow (\bar{z}_{i,j+1} \cdot p_{i,j+1}^{i,j} \cdot \bar{z}'_{i,j}) \cdot (\bar{z}'_{i,j} \cdot \bar{z}'_{i,j}) \cdot (\bar{z}'_{i,j} \cdot \bar{z}_{i,j}) \cdot (\bar{z}_{i,j} \cdot p_{i,j}^{i+1,j} \cdot \bar{z}_{i+1,j}) =$$

$\uparrow$ $\Phi_1(A_{i,j-1})$ $\uparrow$ $i_{(i,j-1)(i,j)}(\omega)$ $\uparrow$ $i_{(i,j-1)(i,j)}^{(w)-1}(\omega)$ $\uparrow$ $\Phi_1(A_{i,j-1})$

$$\omega \in \pi_1(A_{i,j-1} \cap A_{i,j})$$

$$= [\bar{z}_{i,j+1} \cdot p_{i,j+1}^{i,j} \cdot \bar{z}'_{i,j}] \cdot [\bar{z}'_{i,j} \cdot \bar{z}'_{i,j}] \cdot [\bar{z}'_{i,j} \cdot \bar{z}_{i,j}] \cdot [\bar{z}_{i,j} \cdot p_{i,j}^{i+1,j} \cdot \bar{z}_{i+1,j}] =$$

$\downarrow$ $i_{(i,j)(i-1,j)}(\omega) \rightarrow i_{(i-1,j)(i,j)}(\tilde{\omega})$

$$= [\bar{z}_{i,j+1} \cdot p_{i,j+1}^{i,j} \cdot \bar{z}'_{i,j}] \cdot [\bar{z}'_{i,j} \cdot \bar{z}'_{i,j}] \cdot [\bar{z}'_{i,j} \cdot \bar{z}_{i,j}] \cdot [\bar{z}_{i,j} \cdot p_{i,j}^{i+1,j} \cdot \bar{z}_{i+1,j}]$$

תוצאה:

$$\pi_1(X) = \pi_1(A) * \pi_1(B) / \pi_1(ANB) \quad \text{כאשר } ANB, X = A \cup B \quad (1)$$

$$\pi_1(S'_\alpha) \approx \pi_1(V_\alpha S'_\alpha) \approx \pi_1(V_\alpha S'_\alpha) \approx \pi_1(S'_\alpha) \quad (2)$$

בהנחה: $x_0 \in U_{x_0}$ סביבה פתוחה קטנה, S'_α כולל נקודת x_0 ו- S'_α

$$\pi_1(VS') = * \mathbb{Z} \quad (1) \text{ נקודת}$$

$$\pi_1(X, x_0) \approx \pi_1(X^2, x_0) \approx \pi_1(X', x_0) / N \quad (3) \text{ כאן } X$$

נניח $f_\alpha : S' \rightarrow X'$ כאשר $f_\alpha : D^2 \rightarrow X^2$ והמקרה $f_\alpha : S' \rightarrow \partial D^2$ X' קולומב X' X' X'

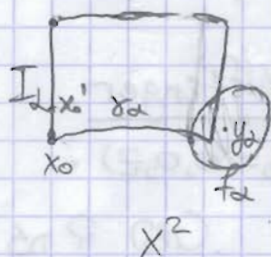
(4) המרחב וסביבתו X' הוא קולומב ונציב מסלול

הפסוק (3):

א. ב. קוואר הוואטופי קוואר ב. X^1 הוואטופי קוואר הוואטופי קוואר X^2 קבן וט אט הסירה למלא.

הפסוק

ה. $f_\alpha: (S^1, s_0) \rightarrow X^1$ נתון, $f_\alpha: (S^1, s_0) \rightarrow X^1$, $f_\alpha(1) = f_\alpha(s_0)$, $f_\alpha(0) = x_0$, $f_\alpha: [0, 1] \rightarrow X^1$



אם $[f_\alpha, f_\beta] \in \pi_1(X^1, x_0)$ נקרא מרחב γ :

ρ x_0 מרחב קטע I כמא בזיו (נוסף ב. α). (כמא בזיו)

x^2 הוואטופי קוואר x^2 הוואטופי קוואר γ וכן x^2 הוואטופי קוואר γ

$A_\alpha = \gamma \setminus \{ \gamma_\alpha \}$; $\gamma = A \cup B$ נכח

$B = \gamma \setminus X^1$, כה כמא כמא מרחב x^1 שדה x^1 A נתון קטע

$\pi_1(X) = \pi_1(X^1) / \pi_1(A \cap B)$ כמא B כמא X^1 $\pi_1(X)$

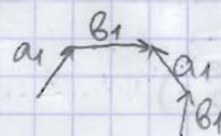
$A \cap B$ הוואטופי קוואר x^2 הוואטופי קוואר x^2 הוואטופי קוואר x^2

הפסוק

$\pi_1(X) = \pi_1(X^1) / \pi_1(A \cap B)$

$$\pi_1(S^2) = 0 \quad (1)$$

$$\pi_1(S_g^2) = \quad (2)$$



$$= \frac{f(a_1, b_1, \dots, a_g, b_g)}{\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle}$$

$$\frac{f(a_1, \dots, a_g)}{\langle a_1^2 \dots a_g^2 \rangle}$$

$$= \pi_1(S^2 \# gRP^2) \quad (3)$$

$$g=1: \pi_1(RP^2) \cong \mathbb{Z}_2$$

$$\pi_1(S^1 \times S^1) = \mathbb{Z}^2$$

$$\pi_1(RP^n) = \mathbb{Z}_2$$

הפסוק: $\pi_1(RP^n)$ כמא $\pi_1(RP^n)$

$$\pi_1(S_g^2)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}, \quad \pi_1(S^2 \# gRP^2)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2$$

ציון: תורה וסדרה של קשר (Knot).

$f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ נקרא קשר. שני קשרים שקולים אם קיימת הומומורפיזם כר שלם
 פרמטר של ההומומורפיזם יהיה קשר. $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ נקרא $K = f(S^1)$ הוא אינומורפי
 תורה. קראו נקרא קשר $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ ציור. $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z}$



$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z}$$



Three fold

Wätinger

a_1, a_2, a_3 נוצר π_1 ה $\mathbb{Z} \gg 0$, $x_0 = (0, 0, z)$.

זה $\mathbb{R}$ פשוט.

$$\pi_1 = \frac{F(a_1, a_2, a_3)}{\langle a_1 = a_3 a_2 a_3^{-1}, \dots \rangle} \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$$

תורה וסדרה של יריעה סגורה

משפט: כל תורה נוצרת סופית היא תורה וסדרה של יריעה U מוליקולר סגורה.

הוכחה: נקרא תורה נוצרת סופית, $G = \langle g_1, \dots, g_p \mid u_1, \dots, u_q \rangle$.

(1) נקרא $X_1 = (S^1 \times S^3) \# \dots \# (S^1 \times S^3)$ $\pi_1(S^1 \times S^3) = \mathbb{Z}$. נוסף כי $\pi_1(M_1 \# M_2) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$.

$$M_1 = (M_1 \setminus B^4) \cup D^4 \quad ; \pi_1(M_1) \cong \pi_1(M_1 \setminus B^4)$$

$$\pi_1(M_1) \cong \frac{\pi_1(M_1 \setminus B^4)}{\pi_1(S^3)} = \pi_1(M_1 \setminus B^4)$$

$$\pi_1(M_1 \# M_2) \cong \frac{\pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)}{\pi_1(S^3)} \quad ! \quad M_1 \# M_2 = (M_1 \setminus B_1^4) \cup (M_2 \setminus B_2^4) \text{ של}$$

קרינה מכאן $\chi_1: S^1 \hookrightarrow X_1$, $[\chi_1] = u_1 \in \pi_1(X_1)$ נקרא $\pi_1(X_1) = F(g_1, \dots, g_p)$.

הוכח. $\pi_1(\overline{U}_\varepsilon) = \mathbb{Z}$ $U_\varepsilon(\chi_1) \cong S^1 \times D^3$ $\pi_1(U_\varepsilon(\chi_1)) \cong \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

אם $\pi_1(\overline{U}_\varepsilon) = \mathbb{Z}$ $X_2 = (X_1 \setminus U_\varepsilon) \cup (D^3 \times S^1)$ $\pi_1(X_2) = \pi_1(X_1 \setminus U_\varepsilon) * \pi_1(D^3 \times S^1)$.

$$\pi_1(X_2) = \frac{\pi_1(X_1 \setminus U_\varepsilon) * \pi_1(D^3 \times S^1)}{\langle [\chi_1] \rangle} \cong \frac{\pi_1(X_1 \setminus U_\varepsilon) * \mathbb{Z} \langle \chi_1 \rangle}{\langle \chi_1 \rangle}$$

$$\pi_1(X_1) \cong \frac{\pi_1(X_1 \setminus U_\varepsilon) * \mathbb{Z} \langle \chi_1 \rangle}{\mathbb{Z} \langle \chi_1 \rangle} \cong \text{Sk}, X_1 = (X_1 \setminus U_\varepsilon) \cup \overline{U}_\varepsilon (*)$$

$$\cong \pi_1(X_1 \setminus U_\varepsilon)$$

והוא הומומורפיזם.

השאלה: האם $p: \tilde{X} \rightarrow X$ מקבילית? $\tilde{X}$ מרחב כיוון ו- X מרחב טופולוגי.
 $X = \bigcup_{\alpha} U_{\alpha}$ כיסוי פתוח של X .
 $\forall \alpha \quad p^{-1}(U_{\alpha}) = \bigcup_{\beta} V_{\alpha\beta}$ כאשר $V_{\alpha\beta}$ פתוחים ב- $\tilde{X}$.

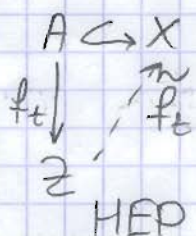
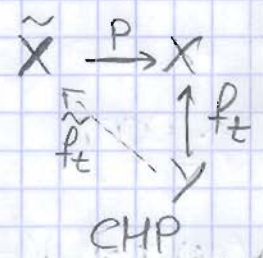
בהינתן $p|_{V_{\alpha\beta}}: V_{\alpha\beta} \rightarrow U_{\alpha}$ הומומורפיזם.

דוגמה: $p(x) = e^{2\pi i x}$, $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$

$p_M(z) = z^M$, $p: S^1 \rightarrow S^1$

Covering Homot. Property (CHP):

אם $p: \tilde{X} \rightarrow X$ מקבילית, $f_t: Y \rightarrow X$ הומומורפיזם, $\tilde{f}_0: Y \rightarrow \tilde{X}$ הומומורפיזם, $p \circ \tilde{f}_0 = f_0$ אז קיים $\tilde{f}_t: Y \rightarrow \tilde{X}$ הומומורפיזם כך ש- $p \circ \tilde{f}_t = f_t$.



הוכחה:

(1) $\gamma = pt$. בולטת יש מסלול $f: [0,1] \rightarrow X$ ו- $f(0) = x_0$ ו- $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ כך ש- $p(\tilde{x}_0) = x_0$. נגד $\tilde{f}: [0,1] \rightarrow \tilde{X}$ כך ש- $p \circ \tilde{f} = f$, נבדוק בקצות כי זה מתאים.

(2) אם γ מרחיק את המסלול f_{γ} . נגד לבדוק שההמשכה $\tilde{f}$ המקבילית היא רציפה.