טופולוגיה אלגברית - הרצאה 1

מבוא: מרחבים טופולוגיים - דוגמאות

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ מטריים. $\underset{\text{כדור n ממדי סגור}}{D^n \subseteq \mathbb{R}^n}$, $\underset{\text{כדור פתוח}}{B^n \subset \mathbb{R}^n}$, $\underset{\text{ספרה n-1 מימדית}}{S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n}$.

כל המרחבים הנ"ל הם יריעות.

$\mathbb{RP}^n, \mathbb{CP}^n$ מרחבים פרויקטיביים.

הגדרה: $\mathbb{RP}^n := \{ l \subset \mathbb{R}^{n+1}, \dim l = 1, 0 \in l \}$

זהו מרחב מטרי - המרחק בין 2 קווים שווה לזווית ביניהם. למרחב זה יש גם מבנה יריעתי - ישנן קואורדינטות (אדישות) פרויקטיביות $(x_0 : x_1 : \dots : x_{n-1} : x_n)$ כאשר לא כל ה-x_i מתאפסים ויש ~~...~~ לפרופורציונליות.

כלומר, $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} /_{x \sim \lambda x}$ (כך ניתן ל-$\mathbb{RP}^n$ טופולוגיית מנה של $\mathbb{R}^{n+1}$).

נגדיר $U_i := \{ x_i \neq 0 \}$ ב-$\mathbb{RP}^n$. ע"י: $(x_0 : x_1 : \dots : x_i : \dots : x_n) \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots, 1, \dots, \frac{x_n}{x_i})$.

אנו מקבלים התאמה $U_i \simeq \mathbb{R}^n$ אז $\mathbb{RP}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$! U_i פתוחות.

על כן ל-$\mathbb{RP}^n$ יש מבנה של יריעה n ממדית.

טענה: $\mathbb{RP}^n$ יריעה קומפקטית.

הוכחה: $\mathbb{RP}^n \cong S^n /_{x \sim (-x)}$ ולכן קומפקטית כמנה של מרחב קומפקטי.

הערה: $\mathbb{RP}^n \setminus U_0 \cong \mathbb{RP}^{n-1} \longleftarrow$ "$\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{RP}^{n-1} = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{R}^{n-1} \cup \dots \cup \{0\}$".

טענה: $\mathbb{CP}^n$ יריעה מרוכבת n מימדית קומפקטית.

הערה: העתקות המעבר הן ביהולומורפיות (רציונליות) ועל כן יש מבנה יריעתי מרוכב.

כמו כן ישנו תרשים:

$$\begin{array}{ccc} p, & S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2} \\ \downarrow & \downarrow \varphi \\ l_p, & \mathbb{CP}^n \end{array}$$

ועל כן יש קומפקטיות. אבל לישר מרוכב יש 2 ממדים ממשיים, על כן $\varphi^{-1}(l_p) \simeq S^1$, ו-$\varphi$ אינו כיסוי.

טענה: $D^{2n} \underset{\text{על}}{\twoheadrightarrow} \mathbb{CP}^n$, חח"ע ב-$B^{2n}$.

כמו קודם - "$\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \ldots \cup \{0\}$".

יריעות Grassmann

<u>הגדרה</u> (1): $Gr(n,k)$, $0<k<n$. קבוצות: $\{L^k \subset \mathbb{R}^n\}$ כלומר אוסף תתי המרחבים הk ממדים ב-$\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{RP}^n = Gr(n+1,1)$$

(2) $$\mathbb{C}Gr(n,k) = \{L^k_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n\}$$

(3) $$Gr_+(n,k) = \{(L^k \subset \mathbb{R}^n, \underbrace{\mu}_{\text{אוריינטציה}})\}$$

<u>טענה</u>: $Gr(n,k)$, $Gr_+(n,k)$ יריעות חלקות קומפקטיות ממימד $k(n-k)$. $\mathbb{C}Gr(n,k)$ יריעה מרוכבת קומפקטית ממימד מרוכב $k(n-k)$.

<u>הוכחה</u>:

$L^k \subseteq \mathbb{R}^n$, $(e_1,\ldots,e_k)$ a base.

$$A = \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_k \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}_{n\times k} \text{ of maximal rk.}$$

לכן קיים מינור $k\times k$ $M_{i_1\ldots i_k}$, והדטרמיננטה שונה מ-0.

נגדיר: $$U_{i_1\ldots i_k} = \underbrace{\{|M_{i_1\ldots i_k}| \neq 0\}}_{\text{תתי מרחבים k ממדים עם מינור כזה}} \subset Gr(n,k)$$

$$A \to M^{-1}_{i_1\ldots i_k} A = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots \end{pmatrix} \\ \quad\quad i_1 \quad\; i_2 \quad\quad\; i_k \end{array}$$

כלומר בחרנו נציגה קנונית שמייצגת את L^k st. כעת באופן ברור $U_{i_1\ldots i_k} \cong \mathbb{R}^{k(n-k)}$.

$$Gr(n,k) = \bigcup_{(i_1,\ldots,i_k)} U_{i_1\ldots i_k}$$

כיסינו את הגרסמן, כעת צריך לבדוק שהטופולוגיות תואמות, כלומר שהעתקות המעבר הן הומיאומורפיזמים, אבל זה ברור, כי הן רציונליות.
אותה הוכחה עובדת לשאר הגרסמנים. נותר להסביר קומפקטיות.
נבנה שיכון של גרסמן לתוך מרחב קומפקטי, ונראה שהתמונה סגורה.
בשביל זה נבנה קואורדינטות הנקראות קואורדינטות plücker.

$L^k \in G_r(n,k)$ קואורדינטות folk-plücker ההומוגניות:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} & & \\ & & \end{pmatrix}}_{n} \Big\}k \qquad \begin{cases} \pi_{i_1 \dots i_k} = |M_{i_1 \dots i_k}| \\ (i_1, \dots, i_k) \subset \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

<u>טענה:</u> (א) קואורדינטות אלו מוגדרות עד כדי פרופורציונליות.
(ב) הן מגדירות את L^k באופן יחיד.

<u>הוכחה:</u>

(א) $L^k \leftarrow A = (\ \ )_n k$ כאשר אנו משנים בסיס כל המינורים מוכפלים באותו $C_{k\times k}$
ולכן הדטרמיננטות מוכפלות בקבוע.

(ב) אם $\pi_{1 \dots k} = 1$, ניתן להניח כי המינור המתאים הוא הבא:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & a_{1,k+1} \dots a_{1,n} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & a_{k,k+1}, \dots, a_{k,n} \end{pmatrix}, \quad \pi_{1,\dots,\hat{i},\dots,k,k+j} = \pm \begin{vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & a_{i,k+i} & \\ 0 & & & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm a_{i,k+j}$$

כנדרש.

<u>מסקנה:</u> ישנו שיכון $G_r(n,k) \hookrightarrow \mathbb{R}P^{\binom{n}{k}-1}$, $G_r(n,k) \hookrightarrow S^{\binom{n}{k}-1}$,

$\mathbb{C}P^{\binom{n}{k}-1} \hookrightarrow \mathbb{C}G(n,k)$. נותר לבדוק שהתמונות סגורות (תרגיל).

<u>טענה:</u> התמונות הן תתי קבוצות אלגבריות, מדרגה 2. (תרגיל).

קבוצות אלגבריות כמובן סגורות

<u>$\mathbb{R}^\infty, \mathbb{C}^\infty, S^\infty, D^\infty, B^\infty, \mathbb{R}P^\infty, \mathbb{C}P^\infty \dots$</u>

<u>הגדרה:</u> (גבול אינדוקטיבי)

$X_1 \subset X_2 \subset \dots$ מרחבים טופולוגיים (המוכלים טופולוגית מושרית).

נגדיר $X := \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$. נגדיר טופולוגיה ב-$X$ באופן הבא:

$U \subset X$ פתוחה (סגורה) $\Leftrightarrow$ $U \cap X_i$ פתוחה (סגורה) ב-X_i, לכל i.

אם למשל, $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{R}^i$ ($\mathbb{R}^i$ משוכן ב-$\mathbb{R}^{i+1}$ ע"י $(x_1, \dots, x_i) \mapsto (x_1, \dots, x_i, 0)$).

קבוצתית: $\{(x_1, \dots, x_k, 0 \dots 0), k \in \mathbb{N}\}$ (אוסף קואורדינטות). זה בוודאי שונה מהמכפלה שהיא
או l_p. <u>זה לא מרחב מטרי</u>.

בדיוק באותו אופן מוגדר $\mathbb{C}^\infty$. את S^∞ נגדיר כ $\{\sum_{k=1}^{\infty} x_i^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^\infty$

(אלו סכומים סופיים).

מאידך, $S^\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} S^i$, כאשר S^i משוכן ב S^{i+1} בקו המשווה.

באותו אופן נגדיר גם D^∞. מעבר כי: $D^\infty \simeq S^\infty$ (תרגיל).

$\mathbb{RP}^\infty = \{\ell \subseteq \mathbb{R}^\infty_{\dim \ell = 1}\}$. שנן קואורדינטות $(x_1 : x_2 : \dots)$ עם מספר סופי של קואורדינטות שונות מ0. $\mathbb{RP}^\infty = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{RP}^i$. $\mathbb{CP}^\infty$ מוגדר באותו אופן.

הגרסמן מוגדר קבוצתית ע"י $Gr(\infty,k) := \{L^k \subseteq \mathbb{R}^\infty\}$

באופן שקול, $Gr(\infty,k) = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} Gr(n,k)$ (השיכונים בחרים, מוסיפים 0 בסוף מימד ועדיין יש אותם מרחבים k מימדיים).

תרגיל: כיצד להגדיר את השיכונים? $Gr(\infty,\infty) \overset{??}{=} \bigcup Gr(\infty,k)$

__פעולות על מרחבים__

(1) מכפלה של מרחבים טופולוגיים.

(2) מנה - $p: X \twoheadrightarrow Y$, p העתקה על (רציפה). מרחב המנה הוא X כאשר מדביקים ב X איברים שעוברים תחת p לאותה נק'.

ניתן להגדיר את הטופולוגיה באופן הבא:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr, dashed, "h\circ p"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

h רציפה $\iff$ $h\circ p$ רציפה.

__דוגמא__: יהא X מ"ט. הגליל של X מוגדר להיות $X\times I$. הקונוס, $Con(X)$, מוגדר ע"י $X\times I/_{X\times\{1\}}$ (מכווצים את הפאה העליונה). מתלה (suspension) מוגדר ע"י: $S(X) := X\times I/_{X\times\{1\},\, X\times\{0\}}$. ($S(S^n) \overset{?}{=} S^{n+1}$).

(3) יהיו X,Y מ"ט. $C(X,Y) := \{f: X\to Y \mid f \text{ רציפה}\}$ עם טופולוגית קומפקטית פתוחה.

קרי, ~~הבסיס~~ התת-בסיס מוגדר ע"י: $W(C,U) := \{f \mid f(C)\subseteq U\}$ כאשר $U\subseteq Y$ פתוחה ו $C\subseteq X$ קומפקטית.

תרגיל: אם Y מטרי ו-X קומפקטי, נגדיר $d(f,g) := \max_{x \in X} \rho(f(x), g(x))$

ב-$C(X,Y)$, זה יתן אותה טופולוגיה.

$\forall x \in U \subset X$, U open.
$\exists x \in V \subset U$, $\overline{V} \subset U$
and $\overline{V}$ is compact.
(קומפקטיות מקומית)

משפט: אם X, Y האוסדורף, קומפקטיים מקומית,

אז $C(X, C(Y,Z)) \simeq C(X \times Y, Z)$