

המשק היחיד של BFS

כזכור, סימנו $\delta(s,u)$ את האורך הקטן של המסלול מ- s ל- u .
~~ראינו~~ ראינו שמקיים:

$$(1) \text{ אם } (u,v) \text{ קשת אז } \delta(s,v) \leq \delta(s,u) + 1$$

$$(2) \text{ אם } (u,v) \text{ הקשת האחרונה במסלול מ- } s \text{ ל- } u \text{ אז } \delta(s,v) = \delta(s,u) + 1$$

טענה: אם u נגיש מ- s , האלף ממקור ב- u , ולפיכך.
הוכחה: באינדוקציה על $k = \delta(s,u)$. אם $k=0$ אזי $s=u$ והטענה ברורה.

אם הטענה נכונה ל- $k-1$ ו- u מקיים $\delta(s,u)=k$, כאשר u מקור ב- u במסלול מ- s ל- u . לפי הניחה האינדוקציה האלף ממקור ב- u , ולכן הוא עובר על כל שטיו, ארמו ו. מש"ל.

טענה: בכל רגע, במור Q נמצאים צמתים ~~אם~~ לכל היותר 2 ערכי d עוקבים, והם בסדר d עולה (כלומר, אם נסתכל על המור ברגע מסוים ונשאל מה ערך ה- d של כל איבר, יתכן שנקבל $4, 4, 3, 3, 3, 4, 5$).
הוכחה: באינדוקציה על צעדי האלגוריתם. בהתחלה Q מכיל רק את s עם ערך $d=0$. נניח כי הטענה נכונה עד רגע מסוים.

$$Q: \quad v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_m$$

$$d: \quad j \quad j \quad \dots \quad j+1 \quad \dots \quad j+1$$

האלגוריתם מוציא את v_1 מהמור, עובר על כל שטיו, ונניח חצבים ("ענפים") ממנה ערך $d=j+1$ ושם אתם בסוף המור, ולכן התכונה נשמרת. מש"ל.

משפט: לכל צמח u , $d[u] = \delta(s,u)$ (כלומר, האלגוריתם נכון).
 וזו נכון גם אם $\delta(s,u) = \infty$.

הוכחה: $d[u] = \infty$ בסיום $\Leftrightarrow$ האלף לא ביקר ב- $u \Leftrightarrow u$ לא נגיש מ- s
 $\Leftrightarrow \delta(s,u) = \infty$

עבור המקרה $\delta(s,u) < \infty$ נוכיח באינדוקציה על $k = \delta(s,u)$. אם $k=0$ אזי $u=s$, $d[s]=0$ באתחול וק $\delta(s,s)=0$, ולכן הטענה נכונה.
 נניח נכונות עבור $k-1$ ויהא u צמח במרחק k מ- s .
 יהא w צמח אחרון (מלבד u) במסלול מ- s ל- u . כמו קודם,

מתקיים $\delta(s, w) = k-1$, ולכן לפי הנחת האינדוקציה האלף ביקר
 ב- w וסם $d[w] \leftarrow k-1$.

מהלכה של Q נקבע שהאלף מבקר בצמתים לפי סדר d עולה,
 ולכן מספיק שנואק ש- $d[u]$ גדול מ- $d[w]$. נסה יקבע ש- u עדין
~~לא בתור כש- w מוכנס לתור. לכן u יהיה סק חגש של w~~
~~כל- w יגיע לראש התור, ואז האלף ישים $d[u] \leftarrow d[w] + 1 (= k)$~~
 כל עוד w בתור יש בתור רק ^{אחרי w} ערכי- d שהם k או $k-1$.

אם u אחרי מהם אכ ערך $d[u] = k$ והוכחנו. אם לא, כש- w
 מגיע לראש התור u לא בתור, לכן u סק חגש של w , והאלף
 ישים בו: $d[u] \leftarrow d[w] + 1 (= k)$

למה עזר: לכל u , $d[u] \geq \delta(s, u)$. גם אם לא שמה זו ניהן להוכיח
 באינדוקציה.

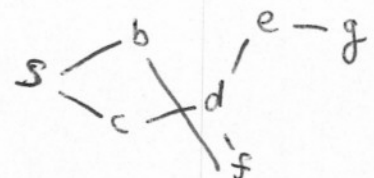
ולכן, $d[u] \geq \delta(s, u) = k > k-1 = \delta(s, w) = d[w]$
 ומכאן נקבע המשפט. מע"ל.

שימושים של BFS

BFS עונה על שאלה של נגישות מ- s (למשל: האם צומח u נגיש
 מצומח s ?) מציאת כל הצמתים הנגישים מ- s ; מציאת מרחק
 של כל צומח מ- s ; מציאת המקסימום מ- s לכל צומח נגיש.
 (נציין שמירת המסלולים באופן מפורש יכולה לקחת $\Theta(V^2)$ זיכרון, בעוד
 שמירת ערכי π דורשת רק $\Theta(V)$ זיכרון. זהו "צב סתום", כלומר
 "צב לא מפורש, בכדי למצוא מק"ק מ- s ל- u , נלך בעקבות מציאת
 π : $v_1 \leftarrow u, v_2 \leftarrow \pi(v_1), v_3 \leftarrow \pi(v_2), \dots$
 (עד שנגיע ל- s)).

ה-BFS מסדר את הצמתים הנגישים מ- s בסכבות (layers), בסכבה
 ה- j נמצאים כל הצמתים עם $d[s] = j$.

0	1	2	3
s	b c	d e f	g



אם הפרז מחוץ, כל קשת שאינה "מסומנת" (= קשת ע-BFS) הנהמה ביקר
 עברית d מחמת צומח בסכבה j כלשהי לצומח בסכבה $j+1$.

אם הגרף לא מכיל, כל קשת מחברת צמתים באותה שכבה או בשכבות סמוכות.

הערה: מצביעי π מהווים למעשה על מכוון ששוויו S , שנקרא לו על המקבים. מק"ב לצומת u בעל הוא המסלול מהשוש u - u . אם צאת, לא כל המקבים מתקבלים בדיוק זו.

אפשר היה לייצג את כל המקבים S בק שכל צומת בשכבה j כלשהי יצביע אל כל הצמתים בשכבה $j-1$ שיש קשת מהם אליו.

שימוש נוסף ומפתיע ל-BFS הוא פתרון למסע הבאה:

נתון גרף לא מכיל S , לקבוע האם G הוא צו-צדדי, ואם כן למצוא פירוק מתאים של V .

לענה: גרף לא מכיל הוא צו-צדדי $\Leftrightarrow$ אין בו מעגל באורך אי-זוגי.

הוכחה: $(\Leftarrow)$ אם G הוא צו-צדדי, כל קשת מעבירה אותנו מ- V_1 ל- V_2 או להיפך. לכן כדי ליצור למאלו צומת צדדי מספר זוגי של קשתות.

$(\Rightarrow)$ נוכח לענין ש- G קשיר (אחרת, ניתן להפצל את הליצון הבא של כל רכיב קשיר בנפרד. אם קיים פירוק לכל רכיב קשיר, קל לאתר פירוק לגרף כולו, ולכן הגרף כולו צו-צדדי).

ניקח צומת s כלשהו, ונריץ BFS ממנו. נקבל את כל הצמתים מסודרים בשכבות, ונלען שאין קשת שמחברת 2 צמתים באותה

שכבה, כי מקשת כזו נקבל מעגל אי-זוגי: מק"ב מ- S

למחרת מקצוות הקשת, הקשת עצמה, ומק"ב מהקצה השני ל- S . שני המקבים האלו אורך (שהוא מספר השכבה) ולכן מעגל זה אכן

באורך אי-זוגי.

לכן כל הקשתות מחברות שכבות סמוכות, ונוכל להצדיר V_1 ו- V_2 כל הצמתים בשכבות הא-זוגיות.

נבחן גם ברור איך משתמשים ב-BFS כדי להכריז צו-צדדי. בכל פעם שאנו נתקלים בסירוק הגרף בצומת "ישן", נבדוק האם הקשת מחברת שני צמתים מאותה שכבה. אם כן, הגרף לא צו-צדדי. אחרת, הפירוק המקובל הוא פירוק לפי צדדי השכבות.

(Depth-First Search)

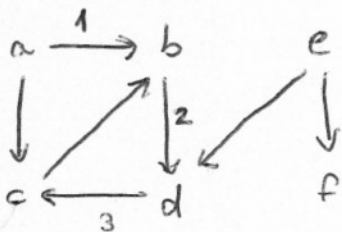
חיפוש לעומק - DFS

DFS מבקר בכל צומת הפתח, החסינה הראשונה DFS מנהלת את החיפוש ע"י כך שהיא בוחרת כל פתח צומת התחלה וחדש שעדיין לא ביקרנו בו ומחילה ממנו חיפוש חדש. DFS-VISIT היא רקורסיביה ומבצעת חיפוש בנסיין להגיע לכל מה שנגיש מצומת ההתחלה הנכונה וסעדין לא ביקרנו בו.

בכל צומת u נשאר צבצב: לבן (כחול נתקלנו ב- u), אפור (נתקלנו ב- u אך כחול סיימנו), שחור (סיימנו לבקר ב- u). time הוא מונה שכל פעימה של אלן נתקלים בצומת חדש או נסיימ'ם סיום בצומת.

$d[u]$ - לא קשור ל- d BFS! המון בו גילינו את u לראשונה.
 $f[u]$ - המון בו סיימנו את החיפוש ב- u .
 $\pi[u]$ - הצומת הקודם שגילה את u .

DFS משמשת ברשימה של הצמתים, ללא אף הנחה על סדר הצמתים ברשימה. הקלט G הוא גרף מכוון או לא, נתון ע"י רשימת שכנות צומת ריבוי:



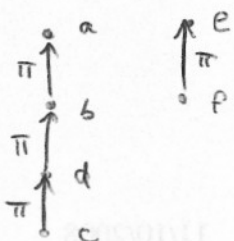
השיט לבד כש- a מצוי ב- c , הוא כבר שחור.

מצביעי π יוצרים אולף של עצים (יער) מכוונים עליון השורש

	$d[]$	$f[]$
a	1	8
b	2	7
c	4	5
d	3	6
e	9	12
f	10	11

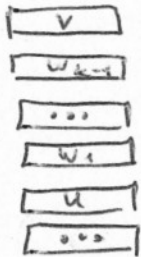
סקרין הקינון (nesting)

כל צומת u מחזיק אינדקס זמן בו u פתח $f[u]$.. $d[u]$. לכל שני צמתים u, v יש שני אינדקסים זרים, או שהאינדקסים שלהם ~~מקוננים~~ מקוננים זה בזה. אם הם מקוננים, הצומת עם האינדקס הקטן הוא באלו של הצומת האחר ביער ה-DFS. היכחה/הסבר: נוח לחשוב על הרקורסיה כמנהלת ע"י מחסנית במסלול מניסות את u למחסנית ובמסלול $f[u]$ מוציאים אותו. אם $u = \pi[v]$, זה קורה במסלול קריאה רקורסיבית ש- u קובל ל- v . נאמר מצביעי π הם מצומת ~~מבנה~~ במחסנית לצומת ~~מבנה~~ ממנו. לכן לא ייתכן מצעל המורכב ממצביעי π , לכן π מעביר את מכוון הסר מעצמים בו לכל צומת דרמה יציאה 1, וזה יצר מכוון.



נניח שהאינדוקציה אינה נכונה, כלומר נניח: $d(u) < d(v) < f(u)$
 קיבלנו שיש $f(u) < f(v)$. ההנחה שקיבלנו באינדוקציה: v מתגלה אחרי u
 התגלה אבל לפני u מסתיים. לכן כש- v התגלה, u במחשבת
 ו- v נכנס לראש המחשבת, משם u . לכן v יוצא מהמחשבת לפני u ,
 כלומר $f(u) < f(v)$ כנדרש.

בהקרה המקיפה v נמצא במחשבת משם u ומקרה המחשבת ברצף זה:
 כלומר מצביע π הם:



$$v \rightarrow w_{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow w_1 \rightarrow u$$

כלומר, v צאצא של u , או בעלים אחרות:
 u אם קצתו של v .

סיכום קשתת הזרימה DFS

ה-DFS אובדן של כל קשתת הזרימה. בחלק מהן הוא משתמש
 להעברה π ובנייה של ה-DFS, והשאר לא. נקרא להן "קשתת
 של" (אלוהי שבת ה-DFS משמש). לקשת שמחברת את קצתו של צאצא
 נקרא "קשת קדמית", לקשת שמחברת צאצא לאב או קצתו נקרא
 "קשת אחורית", ולקשת שלא מחברת צאצא ואב קצתו נקרא "קשת חוצה".

נניח ש- G מכוון. נסתכל על (u, v) ברצף שבו u בודק אותה.

הסבר ל-(2): ברצף שבו v כבר
 התגלה אב לא הסתיים. לכן u
 בראש המחשבת ו- v אי-שם מתחתיו,
 ויכולן ש- u צאצא של v .

- (1) אם u לבן זו קשת של.
 - (2) אם u אביו זו קשת אחורית.
 - (3) אם v שווה זו קשת קדמית או חוצה.
- אם $d(u) < d(v)$ האינדוקציה נכונה, ולכן
 הקשת חוצה. יתרה מזאת, הקשת היא
 מצומת "מאחורי" יותר מצומת "מקדמית" יותר.
 אם $d(u) < f(v)$ האינדוקציה מקיפה, לכן v צאצא של u , והקשת קדמית.