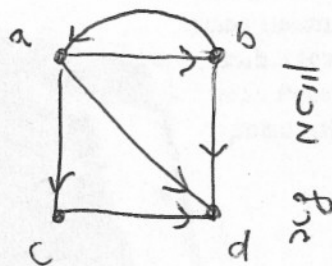
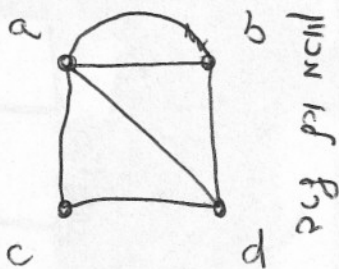


אלגוריתמים - שיעור 1

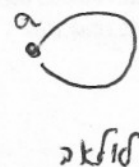
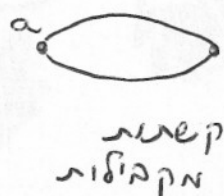
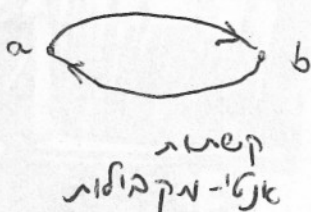
- * ניתן למצוא באינרץ סת' וידאו של ההרצאה מסמכת קורס.
- * כדאי להביא את חיבור הקורס לכל הרצאה.
- * הבחינה דומה לתרגילים: למצוא אלגוריתמים יעילים למימוש השימוש, לוק שמוש באלגוריתמים שמדען בכיתה, ולדקויה את יעילותם.
 - המבחן עשוי לכלול שאלה על כללי שאלות הבנה.
- * שמו הקורס של הקורס: "עולם של חישובים".
- * ספר הקורס: קורמן (אותו ספר ששימש אותנו ב"חבני (מחניים)).

גרפים

גרף הוא זוג $G=(V,E)$ כאשר V הוא קבוצה של קודקודים/צמתים, ו- E היא קבוצה של קשתות; קשת (u,v) היא זוג של צמתים. גרף מכוון הקשתות הן כאלה - סדורים, או בניסוח אינטואיטיבי: לקשתות יש כיוון. גרף לא מכוון הקשתות הן כאלה לא סדורים, כלומר לקשתות אין כיוון.



פולקה היא קשת ממוחזרת. יתכן שיש יותר מקשת אחת בין שתי צמתים, ואז הן נקראות קשתות מקבילות. קשתות שנמצאת הן בכיוון נקראות אנטי-מקבילות.



גרף ללא פולקה וכלל קשתות מקבילות נקרא גרף פשוט.

אם (a,b) קשת, אז a, b נקראו הקצה שלה, וכן סמנים בה a ו- b .

קטע יקרא סמוכט אם u לכן נקוצר קצה משותף.
 בעל מכוון, דרגת היוצאה של צומת u היא מספר הקטעים היוצאים
 מ- u . באופן דומה מספרים דרגת כניסה.

דרגת u היא מספר הקטעים שנכנסים או יוצאים מ- u (בעל לא מכוון
 יש רק דרגה).

קוצקוד עם דרגה 0 נקרא מבודד. אם בעל מכוון ודרגת הכניסה היא 0
 אז הצומת הוא מקור. אם דרגת היוצאה היא 0, הצומת הוא בור (sink).

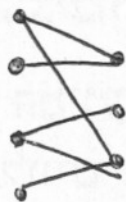
תת-על הוא $G' = (V', E')$ כך ש- $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, $E' \subseteq V' \times V'$.
תת-על מושרה (induced) הוא כזה שכולל את כל הקטעים ה- E
 שמחברים צמתים ב- V' .

מסלול/מסילת הוא סדרה של צמתים $v_1, v_2, \dots, v_k$ כך שלכל i קיימת
 קטע (v_i, v_{i+1}) . אורך המסלול הוא מספר הקטעים שבו (מסלול שאין בו קטעים
 נקרא מסלול ריק).

מעגל הוא מסלול שבו הקוצקוד הראשון הוא הקוצקוד האחרון, ואורכו לפחות 1.
מסלול פשוט / מעגל פשוט הוא כזה שאין בו חזרה על צמתים.

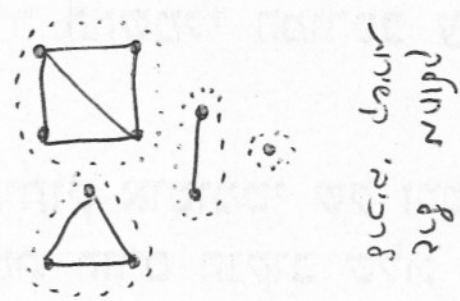
בעל לא מכוון, קליק הוא תת-קבוצה של צמתים שכל שניים מהם
 מחוברים בקטע. גודל שלם K_n הוא גודל n צמתים שבו כל שני
 צמתים מחוברים בקטע (הטונה בעל לא מכוון). קבוצה של צמתים תקרא
בלתי תלויה אם אין שני צמתים בקבוצה שמחוברים בקטע.

גודל צדדי הוא גודל שקבוצת הצמתים שלו היא איחוד זר של שני
 תת-קבוצות של אותו מין בלתי תלויה.

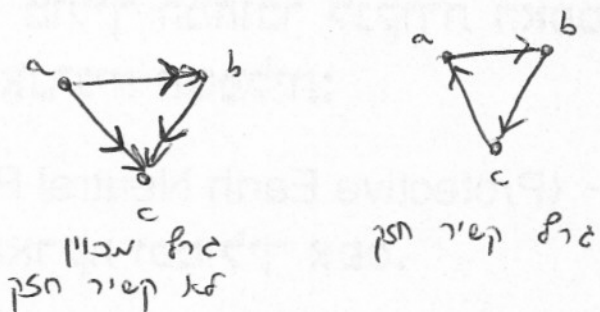


גודל 13-13

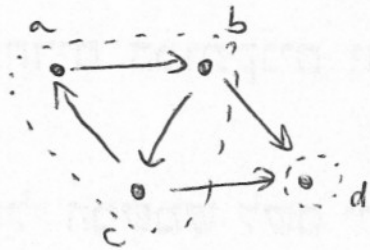
צומת ו נגיש מצומת v, אם קיים מסלול מ-v ל-u. נל צומת נגיש מעצמו.
 גרף לא מכון נקרא קשר אם כל צומת נגיש מכל צומת.
 גרף-קבוצה של קודקודים ונקרא רכיב קשיר אם הוא גרף-קבוצה מקסימלית של צמחים כך שגרף הנושרה שהיא מצורה הוא קשיר.



בתחילת אחרון, רכיב קשיר הוא גרף קשיר מקסימלי.
 כל גרף מתפרק לרכיבי קשירות צמים בצמחים ובקשתות.
 גרף מכון נאמר שהוא קשיר חזק אם כל צומת נגיש מכל צומת ע"י מסלול מכון.



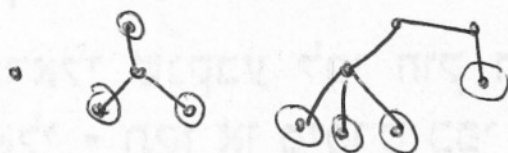
גרף מכון, רכיב קשיר חזק הוא קבוצה מקסימלית של צמחים שהגרף שלהם קשיר חזק.



גרף מכון מחולק לרכיבי קשיר חזק.

לפי פירוק של גרף מכון לרכיבי קשיר חזק הוא פירוק לקבוצות צרות בקודקודים ובקשתות, אך יכולה להיות קשת בין צמחים מרכיבי קשיר חזק שונים.
גרף אציקלי מכון הוא גרף מכון חסר מעגלים.

ערץ לא מכון, חסר מעצלים וקטיר הוא עץ. ערץ לא מכון חסר מעצלים הוא יער וכל רכיב קטיר לאו הוא עץ.
צומח בעץ/יער עם צורה 1 נקרא עץ.



יער (העצלים מסומנים)

בעץ עם n קודקודים יש בדיוק $n-1$ קטרים.
הוכחה האינדוקציה על n : עבור $n=2$ הנכונה ברורה. אם הענף נכון עבור $n-1$ צמחים ונתן על T עם n צמחים, נקח את v ונחלק אותו ואת הקטת היחידה שסמוכה לו, ונקבל את-ערץ T' עם $n-1$ צמחים, עץ מעצלים וקטיר, כלומר עץ. יש בו $n-1$ צמחים, לפיכך לפי הנחה האינדוקציה $n-2$ קטרים, ואכן T יש $n-1$ קטרים כפי שרצינו להוכיח. ה"חור" היחיד בהוכחה הוא ההנחה שכל עץ יש אתה. נראה זאת:

ראינו שיש מבנה שמאפיין עץ:

- קטיר
- חסר מעצלים

- בעל $n-1$ קטרים.

כל שתיים מהתכונות גוררות את השלישית.

עץ מכון הוא ערץ מכון שנוצר באופן הבא: לזקחים על (לא מכון),
באחרים צומח אחד שיקרא שרש העץ, ומכוונים את הקטרים מהשרש והלאה
(או לחילופין לכיוון השרש).

בעץ (לא מכון) בין כל שני צמחים קיים מסלול אחד ויחיד.
נבא לקרוא בחוברת את המונח "טענה בסיסית" שמציג אתה בסיסיות על ערץ.

ייצוג של גרפים

(adjacency = שכנות)

(1) ע"י רשימות שכנות

(2) ע"י מטריצת שכנות

ב"צוג (1) הצגת מיוצגים איננה, וכל צומת u יש מצבים לרשימה מקושרת של כל שכניו.

ייצוג זה חסכון במקום, אך ההצעה פקטת קונקרטי יקר מבחינת זמן חישוב.

מטריצת שכנות (צורת "צוג (2) היא בעלת $|V|$ שורות ו- $|V|$ עמודות,

ומק"מיה:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{אם קיימת קשת בין צומת i ל- j} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

זו שיטה בבעיית ביכרון, בעיקר אם הגרף דליל (כלומר, אין בו הרבה קשתות).

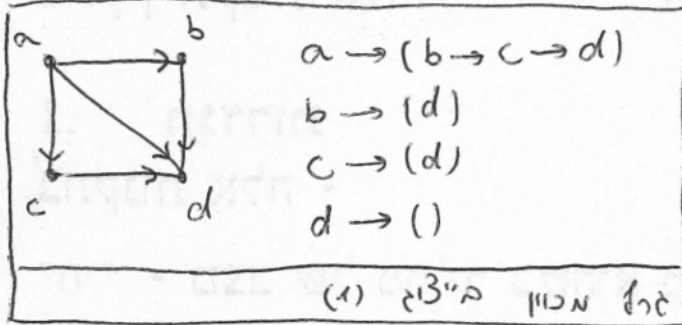
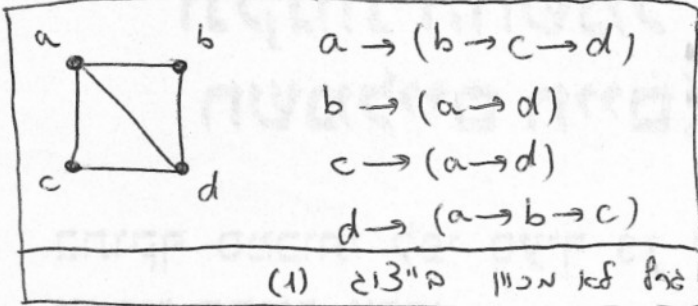
חיפוש לרוחב Breadth-First Search

נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון או לא וצומת התחלה S. מטרתנו לבקר בצורה יעילה בכל הצמתים הנגישים

ועם לחשב, לכל צומת כזה u, את אורך המסלול הקצר ביותר מ-S ל-u. פסאודו-קוד של BFS ניתן למצוא בחוברת. לכל צומת u מחזיקים: $d[u]$ - האורך הקצר ביותר של מסלול מ-S ל-u שהתגלה עד עתה. $\pi[u]$ - מצבים לצומת הקודם במסלול הקצר ביותר מ-S ל-u שהתגלה עד עתה. האלגוריתם מתחיל בעזר Q. נתון ע"י רשימת שכנות

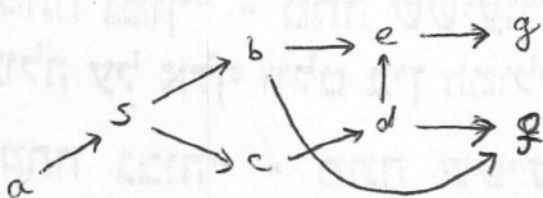
לפי התנה האלגוריתם, כדאי לציין כיצד אלו על הגרף משתנים:

Q: s b c e f d g
d: 0 1 1 2 2 2 3
 π : s s b b c e



	a	b	c	d
a	0	1	1	1
b	0	0	0	1
c	0	0	0	1
d	0	0	0	0

אלו גרף מכוון ב"צוג (2)



(משמעות הצבעים האלגוריתם: לבן - "עוד לא בחנו את הצומת"; "אפור - "התחלנו את בחינת הצומת, אבל הוא עוד לא יצא מהגר"ן"; שחור - "הצומת יצא מהגר"ן וסיימנו את האיפוף בו". למעשה, ההבדל בין אפור לשחור חסר משמעות.)

באמצעות מצביע π ניתן לשמר את המסלול הקצר ביותר לכל צומת. נסמן ב- $\delta(s, v)$ את אורך המסלול הקצר ביותר מ- s ל- v (או ∞ אם אין מסלול מ- s ל- v). נזכיר כי בסיום האלגוריתם, $\delta[v] = \delta(s, v)$, כלומר נזכיר את נכונות האלגוריתם.

$\delta[s] = 0$ בשלל האתחול, וכן $\delta(s, s) = 0$, לכן הטענה נכונה עבור s .

(1) אם $(u, v) \in E$ אז $\delta(s, v) \leq \delta(s, u) + 1$.

(2) אם u צומת קודם ל- v במסלול קצר ביותר מ- s ל- v אז:

$$\delta(s, v) = \delta(s, u) + 1$$

נחזור להוכחה זו בשבוע הבא ונסיים אותה.

כעת נתייחס לסיבוכיות: זמן הריצה של האלגוריתם הוא: $O(|V| + |E|)$

(שם סיבוכיות אופטימלית, כי לביצוע המשימה אנו נדרשים לפחות לקרוא את כל הקצוות).

וצאו שאם מבינים למה זו הסיבוכיות.