

אלגברה ב3

© ארזים

1 בדצמבר 2016

1 מודולים שטוחים

דוגמאות

1. $\mathbb{Z}_2$ אינו שטוח מעל $\mathbb{Z}$: נתבונן בהומומורפיזם $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ המוגדר $f(m) = 2m$. זהו בבירור הומומורפיזם, אבל ההעתקה $f \otimes 1_{\mathbb{Z}_2}$ אינה הומומורפיזם:

$$(f \otimes 1_{\mathbb{Z}_2})(m \otimes u) = f(m) \otimes u = 2m \otimes u = m \otimes 2u = m \otimes 0 = 0$$

כמובן שזה עובד לכל $\mathbb{Z}_n$, עם $f(m) = mn$.

2. יהי R חוג. אזי R^n היא מודול שטוח מעל R . נבדוק: לכל מודול M מעל R , נקבל

$$M \otimes_R R^n \cong M^n$$

האיזומורפיזם הוא

$$(v \otimes (r_1, \dots, r_n)) \mapsto (r_1 v, \dots, r_n v)$$

כעת נניח כי $f: M \rightarrow N$ הוא הומומורפיזם של מודולים מעל R , ונניח כי הוא חד-חד-ערכי. אזי

$$\begin{aligned} f \otimes 1_{R^n}: M \otimes_R R^n &\rightarrow N \otimes_R R^n \\ (m_1, \dots, m_n) &\mapsto (f(m_1), \dots, f(m_n)) \end{aligned}$$

ובבירור זוהי העתקה חד-חד-ערכית, כי f חד-חד-ערכי. לכן R^n אכן שטוח מעל R .

טענה 1.1 יהי $f: A \rightarrow B$ הומומורפיזם של חוגים. יהי M מודול שטוח מעל A . יהי $M_B = B \otimes_A M$ מודול הרחבת הסקלרים של M מהחוג A לחוג B . אזי M_B שטוח מעל R .

הוכחה: נניח כי $i: U \rightarrow V$ הומומורפיזם חד-חד-ערכי של מודולים מעל B . כעת,

$$\begin{aligned} U \otimes_B M_B &= U \otimes_B (B \otimes_A M) \cong (U \otimes_B B) \otimes_A M \cong \\ &\cong U \otimes_A M \\ u \otimes (b \otimes m) &\mapsto (u \otimes b) \otimes m \mapsto bu \otimes m \end{aligned}$$

כעת יש

$$\begin{array}{ccc} U \otimes_B M_B & \xrightarrow{i \otimes 1_{M_B}} & V \otimes_B M_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ U \otimes_A M & \xrightarrow{i \otimes 1_M} & V \otimes_A M \end{array}$$

כאשר המעבר כלפי מטה נעשה על ידי

$$i(u) \otimes (b \otimes m) \mapsto bi(u) \otimes m = i(bu) \otimes m$$

כעת, כיוון שמתקיים $i \otimes 1_M$ חד-חד-ערכי, והדיאגרמה כמובן קומוטטיבית, גם $i \otimes 1_{M_B}$ לכן M_B הוא אכן מודול שטח מעל B . ■

2 אלגבראות

הגדרה 2.1 יהי חוג R . חוג A ייקרא אלגברה מעל R אם A גם מודול מעל R , כך שמתקיים

$$r \cdot (ab) = (r \cdot a) b = a (r \cdot b)$$

$$r \in R, a, b \in A$$

נניח כי A אלגברה מעל R . נגדיר

$$\begin{aligned} f: R &\rightarrow A \\ f(r) &= r \cdot 1_A \end{aligned}$$

אזי f הוא כמובן הומומורפיזם של חוגים:

$$f(rs) = rs \cdot 1_A = r \cdot (s \cdot 1_A) = r \cdot ((s \cdot 1_A) \cdot 1_A) = r \cdot (1_A (s \cdot 1_A)) = (r \cdot 1_A) (s \cdot 1_A) = f(r) f(s)$$

f קובע למעשה את מבנה המודול של A מעל R (כלומר הכפל בסקלר נקבע דרך f - כל $r \in R, a \in A$ מתקיים $r \cdot a = (r \cdot 1_A) a = f(r) a$). למעשה, A מודול מעל R כצמצום סקלרים דרך ההומומורפיזם f .

2.1 הומומורפיזם של אלגבראות

הגדרה 2.2 יהיו A, B שתי אלגבראות מעל החוג R . פונקציה $\varphi : A \rightarrow B$ נקראת הומומורפיזם של אלגבראות מעל R אם φ היא הומומורפיזם של חוגים, וכן הומומורפיזם של מודולים מעל R .

נניח כי $\varphi : A \rightarrow B$ הומומורפיזם של חוגים. נתבונן בהומומורפיזם הבאים (של חוגים):

$$f : R \rightarrow A, g : R \rightarrow B$$

כך שמתקיים

$$\begin{aligned} r \cdot a &= f(r) a \\ r \cdot b &= g(r) b \end{aligned}$$

לכל $a \in A, b \in B, r \in R$. כעת, φ הוא הומומורפיזם של מודולים מעל R אם ורק אם

$$\varphi(r \cdot a) = r \cdot \varphi(a)$$

לכל $r \in R, a \in A$, כלומר,

$$\varphi(f(r) a) = g(r) \varphi(a)$$

נציב $a = 1_A$ ונקבל

$$\varphi \circ f = g$$

לחילופין, אם הקשר $\varphi \circ f = g$ מתקיים, נראה כי φ הוא הומומורפיזם של מודולים. אזי למעשה

$$\varphi(r \cdot a) = \varphi(f(r) a) = \varphi(f(r)) \varphi(a) = g(r) \varphi(a) = r \cdot \varphi(a)$$

דוגמאות

1. כל חוג R הוא אלגברה מעל $\mathbb{Z}$. מבנה המודול הוא

$$n \cdot r = \begin{cases} r + (n-1)r & n \geq 1 \\ 0 & n = 0 \\ -(-n)r & n \leq -1 \end{cases}$$

2. $R[x_1, \dots, x_n]$ אלגברה מעל R .

2.2 אלגברה נוצרת סופית

הגדרה 2.3 אלגברה A מעל חוג R נקראת נוצרת סופית אם אם קיימים $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ כך שלכל $a \in A$ קיים ביטוי פולינומיאלי באיברים $a_1, \dots, a_n$ עם מקדמים בחוג R :

$$\sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0} r_{i_1 \dots i_n} \cdot a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$$

הסכום כמובן סופי.

אם $f : R \rightarrow A$ הוא ההומומורפיזם עבורו $f(r) = r \cdot 1_A$, אז A תמונה הומומורפית על ידי

$$R[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow A$$

$$\sum r_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \longmapsto \sum f(r_{i_1 \dots i_n}) \cdot x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

2.3 מכפלה טנזורית של אלגבראות

תהיינה A, B אלגבראות מעל R . נגדיר

$$D = A \otimes_R B$$

כמודול מעל R . נרצה להגדיר על D מבנה של אלגברה מעל R . לשכס כך נתבונן בפונקציה

$$A \times B \times A \times B \rightarrow D$$

$$(a, b, a', b') \mapsto (aa') \otimes (bb')$$

זאת פונקציה מולטילינארית מעל R , שמגדירה הומומורפיזם יחיד של מודולים

$$m : A \otimes_R B \otimes_R A \otimes_R B \rightarrow D$$

$$m(a \otimes b \otimes a' \otimes b') \rightarrow (aa') \otimes (bb')$$

והרי ידוע כי יש איזומורפיזם יחיד

$$A \otimes_R B \otimes_R A \otimes_R A \cong (A \otimes_R B) \otimes_R (A \otimes_R B) = D \otimes_R D$$

על ידי הרכבה עם האיזומורפיזם, נראה את m כהומומורפיזם

$$m : D \otimes_R D \rightarrow D$$

$$m((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b')) = aa' \otimes bb'$$

m מגדיר את התבנית הבי-לינארית

$$\begin{aligned}\mu &: D \times D \rightarrow D \\ \mu(a \otimes b, a' \otimes b') &= aa' \otimes bb'\end{aligned}$$

קל לראות כי μ מגדירה פעולת כפל על D שהופכת את D לחוג.

$$\mu\left(\sum_i a_i \otimes b_i, \sum_j a'_j \otimes b'_j\right) = \sum_{i,j} a_i a'_j \otimes b_i b'_j$$

כמובן, איבר היחידה הוא $1_A \otimes 1_B$. מעתה, נסמן

$$\mu(d_1, d_2) = d_1 \cdot d_2$$

לכל $d_1, d_2 \in D$. בסך הכל, קיבלנו את D כאלגברה מעל R , על ידי

$$r \cdot (a \otimes b) = ra \otimes b = a \otimes rb$$

לכל $r \in R, a \in A, b \in B$. ההומומורפיזם שנותן את מבנה המודול הוא

$$h(r) = r \cdot 1_D = r \cdot (1_A \otimes 1_B) = r \cdot 1_A \otimes 1_B = 1_A \otimes r \cdot 1_B$$

נקרא להומומורפיזמים שמגדירים את מבני המודולים

$$f(r) = r \cdot 1_A, g(r) = r \cdot 1_B$$

ואז נקבל

$$h(r) = f(r) \otimes 1_B = 1_A \otimes g(r)$$

יש לנו גם הומומורפיזמים

$$\begin{aligned}A \ni a &\mapsto a \otimes 1_B \in D \\ B \ni b &\mapsto 1_A \otimes b \in D\end{aligned}$$

אלה למעשה הומומורפיזמים של חוגים וגם של מודולים, כלומר הומומורפיזמים של אלגבראות.

3 חוגי מנה ומודולי מנה

3.1 בנייה ותכונה אוניברסאלית

הגדרה 3.1 יהי R חוג. נאמר כי תת קבוצה $S \subseteq R$ היא כפלית אם $1 \in S$ וכן לכל $r, s \in S$ מתקיים $rs \in S$.

דוגמאות

1. נניח כי R תחום שלמות, וניקח $S = R \setminus \{0\}$.
 2. נניח כי $P \subsetneq R$ אידאל ראשוני. אזי $S = R \setminus P$ היא כפלית.
 3. נניח כי $a \in R, a \neq 0$. אזי $S = \{a^n \mid n \geq 0\}$ כפלית.
- כאשר $S \subseteq R$ כפלית, נגדיר על $R \times S$ את היחס הבא:
- $$(a, t) \sim (b, s) \iff \exists v \in S. (as - bt)v = 0$$

טענה 3.2 זהו יחס שקילות.

הוכחה: רפלקסיביות וסימטריה ברורות מההגדרה. כעת, נניח כי

$$(a, t) \sim (b, s), (b, s) \sim (c, u)$$

אזי קיימים $v, w \in S$ כך שמתקיים

$$\begin{aligned}(as - bt)v &= 0 \\(bu - cs)w &= 0\end{aligned}$$

נפתח סוגריים:

$$\begin{aligned}asv - btv &= 0 \\buw - csw &= 0\end{aligned}$$

נכפיל את השוויון הראשון פי uw , ואת השני פי tv .

$$\begin{aligned}asvuw - btvuw &= 0 \\buw tv - csw tv &= 0\end{aligned}$$

נחבר ונקבל

$$\begin{aligned}asvuw - csw tv &= 0 \\(au - ct)svw &= 0\end{aligned}$$

וכמובן $svw \in S$ כי S כפלית. לכן מההגדרה $(a, t) \sim (c, u)$, והוכחנו טרנזיטיביות. ■

סימון נסמן את מחלקת השקילות של (a, t) בתור $\frac{a}{t}$. את קבוצת מחלקות השקילות נסמן

$$S^{-1}R$$

על $S^{-1}R$ נגדיר פעולות חיבור וכפל, כדי ליצור חוג.

$$\begin{aligned}\frac{a}{t} + \frac{b}{s} &= \frac{as + bt}{ts} \\ \frac{a}{t} \cdot \frac{b}{s} &= \frac{ab}{ts}\end{aligned}$$

יש להראות כמובן שאלה מוגדרים היטב. נניח כי $\frac{a}{t} = \frac{a'}{t'}$, $\frac{b}{s} = \frac{b'}{s'}$. מההגדרה, יש $u, v \in S$ עבורם

$$\begin{aligned}(at' - a't)u &= 0 \\ (bs' - b's)v &= 0\end{aligned}$$

נתבונן בהפרש

$$\begin{aligned}(as + bt)t's' - (a's' + b't')ts &= ast's' + btt's' - a's'ts - b't'ts = \\ &= (at' - a't)ss' + (bs' - b's)tt'\end{aligned}$$

כאשר נכפיל פי uv נקבל 0, ולכן אכן יש שקילות, כי $uv \in S$ (כפלית). לכן החיבור שהגדרנו אכן מוגדר היטב, כלומר

$$\frac{as + bt}{ts} = \frac{a's' + b't'}{t's'}$$

הבדיקה עבור הכפל קלה, דומה, ותישאר כתרגיל. קל לבדוק אסוציאטיביות, דיסריבוטיביות. איבר האפס הוא $\frac{0}{1}$ - מתקיים

$$\frac{0}{1} + \frac{a}{t} = \frac{a}{t}$$

נשים לב שמתקיים

$$\frac{a}{t} = \frac{0}{1} \iff \exists v \in S. av = 0$$

בפרט, $\frac{0}{s} = \frac{0}{1}$ לכל $s \in S$. איבר היחידה הוא כמובן $\frac{1}{1}$ - מתקיים

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{a}{s} = \frac{a}{s}$$

ונשים לב שמתקיים

$$\frac{a}{s} = \frac{1}{1} \iff \exists v \in S. (a - s)v = 0$$

בפרט, לכל $s \in S$ מתקיים $\frac{s}{s} = \frac{1}{1}$. הנגדי של $\frac{a}{t}$ נתון על ידי $\frac{-a}{t}$, שכן

$$\frac{a}{t} + \frac{-a}{t} = \frac{at - at}{t^2} = \frac{0}{t^2} = \frac{0}{1}$$

נגדיר

$$f: R \rightarrow S^{-1}R$$

$$f(x) = \frac{x}{1}$$

קל לראות שזהו הומומורפיזם. לכל איבר $s \in S$, מתקיים כמובן שהאיבר $f(s)$ הפיך:

$$\frac{s}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{s}{s} = \frac{1}{1}$$

דוגמאות

1. כאשר R תחום שלמות, $S = R \setminus \{0\}$, אזי $S^{-1}R$ הוא שדה, ונקרא שדה המנות של R . לכל $a \in S, t \in S$ מתקיים

$$\frac{a}{t} \cdot \frac{t}{a} = \frac{1}{1}$$

כלומר $\frac{a}{t}$ הפיך. למעשה, לכל $a, t \in R$ כך שמתקיים $a, t \neq 0$, האיבר $\frac{a}{t}$ הפיך. כאן ההומומורפיזם $f(x) = \frac{x}{1}$ הוא חד חד ערכי, כי אין מחלקי אפס, ולכן כל איברי $S^{-1}R$ שאינם 0 הפיכים.

בפרט, ניקח את תחום השלמות $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ ($\mathbb{F}$ שדה), ושדה המנות נקרא שדה הפונקציות הרציונליות מעל $\mathbb{F}$ עבור n משתנים.

2. בחוג $R = \mathbb{Z}$, ניקח את האידאל הראשוני $p\mathbb{Z}$, עבור p ראשוני. ניקח $S = \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$. במצב זה נקבל $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_p$, וזהו חוג מקומי (ראינו את הדוגמה הזו).