

אלגברה ב3

© ארזים

24 בנובמבר 2016

1 תזכורת

הגדרה 1.1 יהי $f : A \rightarrow B$ הומומורפיזם של חוגים. יהי M מודול מעל A . נגדיר את $M_B = B \otimes_A M$ הרחבת הסקלרים מהחוג A לחוג B .

טענה 1.2 אם M מודול מעל A נוצר סופית, אזי M_B נוצר סופית מעל B .

הוכחה: בהמשך. ■

2 מכפלה טנזורית וסדרות מדויקות

טענה 2.1 יהיו M, N, P מודולים מעל R . אזי קיים איזומורפיזם קנוני

$$T = T_{M,N,P} = \text{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_R(N, P))$$

הוכחה: יהי $f \in \text{Hom}_R(M \otimes_R N, P)$. נגדיר

$$T(f)(m)(n) = f(m \otimes n)$$

ברור כי $T(f)$ חיבורי, וכי לכל $r \in R$ מתקיים

$$T(rf) = rT(f)$$

לכן T הוא הומומורפיזם של מודולים מעל R .
נראה כי T חד-חד-ערכי. נניח כי

$$T(f) = 0 \iff T(f)(m)(n) = 0 \iff f(m \otimes n) = 0$$

כמובן, $M \otimes_R N$ נוצר על ידי האיברים $m \otimes n$, ולכן $f = 0$ - כלומר T חד-חד-ערכי.
נותר להראות שהוא על. יהי $\varphi \in \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_R(N, P))$. נגדיר

$$\begin{aligned} \xi : M \times N &\rightarrow P \\ \xi(m, n) &= \varphi(m)(n) \end{aligned}$$

ברור כי ξ בילינארית, ולכן קיים ויחיד הומומורפיזם $f : M \otimes_R N \rightarrow P$ כך שמתקיים
 $f(m \otimes n) = \xi(m, n)$ ואז

$$T(f) = \varphi$$

■

לכן סיימנו.

טענה 2.2 תהי $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ סדרה מדויקת של מודולים מעל R . יהי N מודול מעל R . אזי

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes 1_N} M \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes 1_N} M'' \otimes_R N \rightarrow 0$$

היא סדרה מדויקת.

הוכחה: נתבונן בסדרה

$$0 \rightarrow \text{Hom}_R(M'', \text{Hom}_R(N, P)) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_R(N, P)) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(M', \text{Hom}_R(N, P))$$

שהיא מדויקת (ראינו בעבר כי הפונקטור $\text{Hom}(\cdot, \text{Hom}(N, P))$ שומר דיוק בצורה זו).
 כעת,

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow \text{Hom}_R(M'', \text{Hom}_R(N, P)) & \xrightarrow{g^*} & \text{Hom}_R(M, \text{Hom}_R(N, P)) & \xrightarrow{f^*} & \text{Hom}_R(M', \text{Hom}_R(N, P)) \\ T_{M'', N, P} \uparrow & & T_{M, N, P} \uparrow & & \uparrow T_{M', N, P} \\ \text{Hom}_R(M'' \otimes_R N, P) & \xrightarrow{\tilde{g}} & \text{Hom}_R(M \otimes_R N, P) & \xrightarrow{\tilde{f}} & \text{Hom}_R(M' \otimes_R N, P) \end{array}$$

כאשר $\tilde{f} = T_{M, N, P}^{-1} f^* T_{M', N, P}$, $\tilde{g} = T_{M, N, P}^{-1} g^* T_{M'', N, P}$, כעת נקבל כי עבור $\varphi \in \text{Hom}_R(M'' \otimes_R N, P)$ נקבל

$$\begin{aligned} (T_{M'', N, P} \varphi)(m'')(n) &= \varphi(m'' \otimes n) \\ (g^*(T_{M'', N, P} \varphi))(m)(n) &= \varphi(g(m) \otimes n) \\ (T_{M, N, P}^{-1} g^* T_{M'', N, P} \varphi)(m \otimes n) &= \varphi(g(m) \otimes n) = \\ &= \varphi \circ (g \otimes 1_N)(m \otimes n) = \\ &= (g \otimes 1_N)^*(\varphi)(m \otimes n) \\ T_{M, N, P}^{-1} g^* T_{M'', N, P} \varphi &= (g \otimes 1_N)^* \varphi \end{aligned}$$

■

הסדרה התחתונה מדויקת לכל P , ולכן גם הסדרה שבטענה מדויקת.

נחזור כעת לטענה מתחיל השיעור, ונוכיח אותה.

הוכחה: יהי M מודול נוצר סופית מעל A . אזי

$$\begin{array}{ccccc} \ker \varphi \rightarrow & A^n & \xrightarrow{\varphi} & M \rightarrow 0 \\ \ker \varphi \otimes_A B \rightarrow & B \otimes_A A^n & \xrightarrow{\varphi} & B \otimes_A M \rightarrow 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ ??? \rightarrow & B^n & \rightarrow & M_B \rightarrow 0 \end{array}$$

■

ולכן M_B נוצר סופית.

הגדרה 2.3 יהי N מודול מעל R כך שהפוקנטור

$$M \mapsto M \otimes_R N$$

שומר על דיוק של סדרות. נאמר כי המודול N הוא מודול שטוח.

טענה 2.4 התנאים הבאים שקולים.

1. N מודול שטוח מעל R .
 2. $\otimes_R N \cdot$ מעביר סדרה קצרה מדויקת לסדרה קצרה מדויקת.
 3. לכל $f : M' \rightarrow M$ מונומורפיזם ההומומורפיזם $f \otimes 1_N : M' \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N$ חד חד ערכי.
 4. לכל $f : M' \rightarrow M$ מונומורפיזם בין מודולים נוצרים סופית, $f \otimes 1_N$ חד חד ערכי.
- הוכחה:** ברור כי $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$.
 $2 \Rightarrow 1$ תהי

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} M_n$$

סדרה מדויקת. נוכיח שהטנזור שומר עליה. נתבונן בתת סדרה

$$M_{i-1} \rightarrow M_i \rightarrow M_{i+1}$$

נוכל להתבונן בתת סדרה הקצרה המדויקת

$$0 \rightarrow \operatorname{Im} f_i \hookrightarrow M_i \xrightarrow{f_{i+1}} \operatorname{Im} f_{i+1} \rightarrow 0$$

מהנתון מותר לקחת טנזור:

$$0 \rightarrow \operatorname{Im} f_i \otimes_R N \hookrightarrow M_i \otimes_R N \xrightarrow{f_{i+1} \otimes 1_N} \operatorname{Im} f_{i+1} \otimes_R N \rightarrow 0$$

אזי מתקיים

$$\ker(f_{i+1} \otimes 1_N) = \operatorname{Im}(f_i \otimes 1_N)$$

ולכן בכל שלב, סדרת הטנזורים מדויקת, ולכן כל הסדרה מדויקת לאחר לקיחת טנזור.
 $3 \Rightarrow 2$: ידוע כבר כי טנזור הוא מדויק מימין, והנתון מבטיח שהוא מדויק גם משמאל - כלומר הוא מדויק.
 $4 \Rightarrow 3$: נניח כי $f : M' \rightarrow M$ חד חד ערכי. נניח כי $W = \sum_i u'_i \otimes v_i \in \ker(f \otimes 1_N)$. כלומר מתקיים

$$\sum_i f(u'_i) \otimes v_i = 0 \in M \otimes N$$

יהי $M'_0 \subseteq M'$ הנוצר על ידי $\{u'_i\}$. נסמן

$$w_0 = \sum_i u'_i \otimes v_i \in M'_0 \otimes N$$

ראינו בעבר כי יש $M_0 \subseteq M$ נוצר סופית המכיל את $f(M'_0)$ כך שמתקיים

$$\sum_i f(u'_i) \otimes v_i = 0 \in M_0 \otimes N$$

לכן, אם נגדיר $f_0 = f|_{M'_0} : M'_0 \rightarrow M_0$, היא תהיה חד חד ערכית, ונקבל

$$(f_0 \otimes 1_N)(w_0) = 0$$

אבל מההנחה $f_0 \otimes 1_N$ חד חד ערכית, ולכן $w_0 = 0$ - כלומר f חד חד ערכית. ■