

אלגברה ב3

© ארזים

21 בנובמבר 2016

1 מכפלה טנזורית - המשך

טענה 1.1 יהיו M, N, P מודולים מעל R . אז:

1. קיים איזומורפיזם יחיד

$$M \otimes_R N \xrightarrow{\sim} N \otimes_R M$$

כך שמתקיים

$$u \otimes v \rightarrow v \otimes u$$

2. קיימים איזומורפיזמים יחידים

$$(M \otimes_R N) \otimes_R P \xrightarrow{\sim} M \otimes_R (N \otimes_R P) \xrightarrow{\sim} M \otimes_R N \otimes_R P$$

כך שמתקיים

$$(u \otimes v) \otimes w \rightarrow u \otimes (v \otimes w) \rightarrow u \otimes v \otimes w$$

3. קיים איזומורפיזם יחיד

$$(M \oplus N) \otimes_R P \xrightarrow{\sim} M \otimes_R P \oplus N \otimes_R P$$

כך שמתקיים

$$(u + v) \otimes w \rightarrow u \otimes w + v \otimes w$$

4. קיים איזומורפיזם יחיד

$$R \otimes_R M \xrightarrow{\sim} M$$

כך שמתקיים

$$r \otimes v \rightarrow rv$$

הוכחה: נראה את סעיפים 2,3 - סעיפים 1,4 מוכיחים באותה צורה.
סעיף 2: נקבע $w \in P$. נגדיר פונקציה

$$f_w : M \times N \rightarrow M \otimes_R N \otimes_R P$$

לפי

$$f_w(u, v) = u \otimes v \otimes w$$

$f'_w : M \otimes_R N \rightarrow M \otimes_R N \otimes_R P$ יחיד f_w בלינארית מעל R , ולכן מגדירה הומומורפיזם יחיד
כך שמתקיים

$$f'_w(u \otimes v) = f_w(u, v) = u \otimes v \otimes w$$

נגדיר כעת

$$\begin{aligned} \varphi : (M \otimes_R N) \times P &\rightarrow M \otimes_R N \otimes_R P \\ \varphi(\xi, w) &= f'_w(\xi) \end{aligned}$$

φ בלינארית מעל R , ולכן מגדירה הומומורפיזם יחיד $f : (M \otimes_R N) \otimes_R P \rightarrow M \otimes_R N \otimes_R P$ כך שמתקיים

$$f(\xi \otimes w) = \varphi(\xi, w)$$

f נקבע באופן יחיד על ידי

$$f((u \otimes v) \otimes w) = \varphi(u \otimes v, w) = u \otimes v \otimes w$$

בכיוון ההפוך, נגדיר

$$\begin{aligned} \alpha : M \times N \times P &\rightarrow (M \otimes_R N) \otimes_R P \\ \alpha(u, v, w) &= (u \otimes v) \otimes w \end{aligned}$$

ברור כי α טרילינארית מעל R , ולכן היא מגדירה הומומורפיזם יחיד

$$\begin{aligned}\alpha' : M \otimes_R N \otimes_R P &\rightarrow (M \otimes_R N) \otimes_R P \\ \alpha'(u \otimes v \otimes w) &= (u \otimes v) \otimes w\end{aligned}$$

וברור כי f, α' הופכיות. באותה צורה בדיוק מראים את האיזומורפיזם הנוסף שמבוקש בסעיף זה.

סעיף 3: נגדיר

$$\begin{aligned}f : (M \oplus N) \times P &\rightarrow M \otimes_R P \oplus N \otimes_R P \\ f((u+v), w) &= u \otimes w + v \otimes w\end{aligned}$$

$f' : (M \oplus N) \otimes_R P \rightarrow$ בילינארית מעל R , ולכן היא מגדירה הומומורפיזם יחיד f כמתקיים

$$f'((u+v) \otimes w) = u \otimes w + v \otimes w$$

כיוון שמתקיים

$$\begin{aligned}f'(u \otimes w) &= u \otimes w \\ f'(v \otimes w) &= v \otimes w\end{aligned}$$

ברור כי f' על. כעת נראה כי f' חד־חד־ערכית. נניח כי

$$f'\left(\sum (u_i + v_i) \otimes w_i\right) = 0$$

כלומר

$$\sum u_i \otimes w_i + \sum v_i \otimes w_i$$

לכן נקבל

$$\begin{aligned}\sum u_i \otimes w_i &= 0 \in M \otimes_R P \\ \sum v_i \otimes w_i &= 0 \in N \otimes_R P\end{aligned}$$

ניזכר בסימוני ההוכחה של קיום המכפלה הטנזורית - במודול $C_{M \otimes_R P}$, מתקיים $\sum (u_i, w_i) \in D_{M \otimes_R P}$, וכן במודול $C_{N \otimes_R P}$ מתקיים $\sum (v_i, w_i) \in D_{N \otimes_R P}$. כעת ברור כי במודול $C_{(M \oplus N) \otimes_R P}$ מתקיים

$$D_{N \otimes_R P}, D_{M \otimes_R P} \subseteq D_{(M \oplus N) \otimes_R P}$$

לכן מתקיים

$$\sum u_i \otimes w_i, \sum v_i \otimes w_i = 0 \in (M \oplus N) \otimes_R P$$

ולכן

$$\sum u_i \otimes w_i + \sum v_i \otimes w_i = 0 \in (M \oplus N) \otimes_R P$$

■

נניח כי $f : M \rightarrow M', g : N \rightarrow N'$ הומומורפיזמים של מודולים מעל R . נגדיר העתקה

$$\begin{aligned} \varphi : M \times N &\rightarrow M' \otimes_R N' \\ \varphi(u, v) &= f(u) \otimes g(v) \end{aligned}$$

φ בילינארית מעל R , ולכן מגדירה הומומורפיזם יחיד, שנשמנו $f \otimes g$, כאשר

$$\begin{aligned} f \otimes g : M \otimes_R N &\rightarrow M' \otimes_R N' \\ (f \otimes g)(u \otimes v) &= f(u) \otimes g(v) \end{aligned}$$

אם $f' : M' \rightarrow M'', g' : N' \rightarrow N''$ הומומורפיזמים של מודולים מעל R , אזי ברור כי

$$(f \circ f') \otimes (g \circ g') = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g) : M \otimes_R N \rightarrow M'' \otimes_R N''$$

בפרט, אם f, g איזומורפיזמים אז גם $f \otimes g$ איזומורפיזם, כי נקח $f' = f^{-1}, g' = g^{-1}$ ואז

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = 1_M \otimes 1_N = 1_{M \otimes N}$$

דוגמא יהיו U, V מרחבים ווקטוריים מעל שדה $\mathbb{K}$. נבחר בסיסים מעל $\mathbb{K}$: $\{v_i\}_{i \in I}$ בסיס של V , $\{u_j\}_{j \in J}$ בסיס של U . אזי הקבוצה $\{v_i \otimes u_j \mid i \in I, j \in J\}$ היא בסיס של $V \otimes_{\mathbb{K}} U$.

אנו יודעים כי הם פורשים. יש להוכיח אי תלות, כלומר להראות שכל תת קבוצה $\{v_i \otimes u_j \mid i \in I_0, j \in J_0\}$, כאשר I_0, J_0 סופיות, היא בלתי תלויה. נסמן

$$\begin{aligned} V_{I_0} &= \text{span}\{v_i \mid i \in I_0\} \\ V_{I \setminus I_0} &= \text{span}\{v_i \mid i \in I \setminus I_0\} \\ U_{J_0} &= \text{span}\{u_j \mid j \in J_0\} \\ U_{J \setminus J_0} &= \text{span}\{u_j \mid j \in J \setminus J_0\} \end{aligned}$$

כעת מתקיים

$$V \otimes_{\mathbb{K}} U = (V_{I_0} \oplus V_{I \setminus I_0}) \otimes_{\mathbb{K}} (U_{J_0} \oplus U_{J \setminus J_0}) \cong V_{I_0} \otimes_{\mathbb{K}} U_{J_0} \oplus V_{I_0} \otimes_{\mathbb{K}} U_{J \setminus J_0} \oplus V_{I \setminus I_0} \otimes_{\mathbb{K}} U_{J_0} \oplus V_{I \setminus I_0} \otimes_{\mathbb{K}} U_{J \setminus J_0}$$

נניח כי מתקיים

$$\sum_{\substack{i \in I_0 \\ j \in J_0}} x_{i,j} (v_i \otimes u_j) = 0 \in V \otimes_{\mathbb{K}} U$$

מהפירוק שראינו לסכום ישר נקבל

$$\sum x_{i,j} (u_i \otimes v_j) = 0 \in V_{I_0} \otimes_{\mathbb{K}} U_{J_0}$$

כעת נכתוב

$$\begin{aligned} V_{I_0} &= \bigotimes_{i \in I_0} \mathbb{K} v_i \\ U_{J_0} &= \bigotimes_{j \in J_0} \mathbb{K} u_j \\ V_{I_0} \otimes_{\mathbb{K}} U_{J_0} &= \bigoplus_{\substack{i \in I_0 \\ j \in J_0}} \mathbb{K} v_i \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} u_j = \bigoplus_{\substack{i \in I_0 \\ j \in J_0}} \mathbb{K} (v_i \otimes u_j) \end{aligned}$$

ולכן נקבל $x_{i,j} = 0$ לכל $i \in I_0, j \in J_0$. בפרט, אם המימדים של U, V סופיים, אזי המימד של $U \otimes_{\mathbb{K}} V$ הוא מכפלת המימדים. נניח כי $T : V \rightarrow V', S : u \rightarrow U'$ העתקות לינאריות של מרחבים ווקטוריים מעל $\mathbb{K}$. ראינו את ההעתקה

$$\begin{aligned} T \otimes S : V \otimes_{\mathbb{K}} U &\rightarrow V' \otimes_{\mathbb{K}} U' \\ (T \otimes S)(v_i \otimes u_j) &= T(v_i) \otimes S(u_j) \end{aligned}$$

ניקח בסיסים:

$$B_V = \{v_i\} \subseteq V, B_{V'} = \{v'_i\} \subseteq V', B_U = \{u_j\} \subseteq U, B_{U'} = \{u'_j\} \subseteq U'$$

כעת נסמן

$$\begin{aligned} [T]_{B_{V'}}^{B_V} &= (a_{ij}) = A \\ [S]_{B_{U'}}^{B_U} &= (b_{\alpha\beta}) = B \end{aligned}$$

כעת מתקיים

$$\begin{aligned} T(v_j) &= \sum_i a_{ij} v'_i \\ S(u_\beta) &= \sum_\alpha b_{\alpha\beta} u'_\alpha \\ (T \otimes S)(v_j \otimes u_\beta) &= T(v_j) \otimes S(u_\beta) = \left(\sum_i a_{ij} v'_i \right) \otimes \left(\sum_\alpha b_{\alpha\beta} u'_\alpha \right) \\ &= \sum_{i,\alpha} a_{ij} b_{\alpha\beta} (v'_i \otimes u'_\alpha) \end{aligned}$$

לכן למעשה מתקיים

$$[T \otimes S]_{B_{V'} \otimes B_{U'}}^{B_V \otimes B_U} = (a_{ij} b_{\alpha\beta})$$

לפי סדר כלשהו שנבחר על איברי הבסיס. לדוגמא לפי הסדר

$$\begin{aligned} B_V \otimes B_U : v_1 \otimes B_U, v_2 \otimes B_U, \dots \\ B_{V'} \otimes B_{U'} : v'_1 \otimes B_{U'}, v'_2 \otimes B_{U'}, \dots \end{aligned}$$

ואז נקבל

$$[T \otimes S]_{B_{V'} \otimes B_{U'}}^{B_V \otimes B_U} = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

2 צמצום סקלרים והרחבת סקלרים

נתון הומומורפיזם של חוגים $f: A \rightarrow B$. נתון מודול M מעל B . באמצעות f ניתן להגדיר על M מבנה של מודול מעל A : לכל $a \in A, v \in M$ נגדיר

$$av := f(a)v$$

זה נותן מבנה על M של מודול מעל A , למשל:

$$(a_1 a_2)v = f(a_1 a_2)v = (f(a_1)f(a_2))v = f(a_1)(f(a_2)v) = a_1(a_2v)$$

המודול שמתקבל מעל A נקרא המודול המתקבל מתוך M על ידי סקלרים לתוך A .

מקרה פרטי $M = B$. אפשר לחשוב על B בתור מודול מעל A , לפי

$$a \cdot b := f(a)b$$

טענה 2.1 נתון $f : A \rightarrow B$ הומומורפיזם של חוגים. נניח כי M מודול נוצר סופית מעל B , ונניח כי B נוצר סופית כמודול מעל A . אזי M נוצר סופית מעל A .

הוכחה: נכתוב

$$\begin{aligned} M &= Bv_1 + \cdots + Bv_k \\ B &= Ab_1 + \cdots + Ab_n \end{aligned}$$

ונקבל

$$M = \sum_{i,j=1}^{n,k} (Ab_i)v_j = \sum_{i,j=1}^{n,k} A(b_iv_j)$$

■

כעת, נתון $f : A \rightarrow B$ הומומורפיזם של חוגים. נראה את B כמודול מעל A . יהי M מודול מעל A , ונגדיר

$$M_B = B \otimes_A M$$

זהו מודול מעל A .
יהי $b \in B$. נגדיר פונקציה

$$\begin{aligned} f_b : B \times M &\rightarrow B \otimes_A M \\ f_b(b', v) &= bb' \otimes v \end{aligned}$$

זו כמובן העתקה בילינארית מעל A . לכן יש הומומורפיזם יחיד של מודולים מעל A

$$\begin{aligned} f'_b : B \otimes_A M &\rightarrow B \otimes_A M \\ f'_b(b' \otimes v) &= bb' \otimes v \end{aligned}$$

נגדיר עבור $b \in B$, $\xi \in M_B = B \otimes_A M$ את

$$b \cdot \xi = f'_b(\xi)$$

זה נותן מבנה של מודול מעל B . נראה למשל

$$\begin{aligned} (b_1 + b_2) \xi &= b_1 \xi + b_2 \xi \\ f'_{b_1+b_2}(\xi) &= f'_{b_1}(\xi) + f'_{b_2}(\xi) \end{aligned}$$

מספיק להראות עבור $\xi = b' \otimes v$ יוצר.

$$\begin{aligned} f'_{b_1+b_2}(b' \otimes v) &= (b_1 + b_2)b' \otimes v = (b_1b' + b_2b) \otimes v = b_1b' \otimes v + b_2b' \otimes v = \\ &= f'_{b_1}(b' \otimes v) + f'_{b_2}(b' \otimes v) \end{aligned}$$

כפי שרצינו.

דוגמא יהי V מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{R}$. נתובן במרחב

$$V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$$

זה מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{C}$. אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V מעל $\mathbb{R}$ אזי $\{1 \otimes v_1, \dots, 1 \otimes v_n\}$ בסיס של $V_{\mathbb{C}}$.

בכיוון השני, אם V מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{C}$, אזי V מרחב ווקטורי גם מעל $\mathbb{R}$. אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V מעל $\mathbb{C}$, אזי $\{v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n\}$ בסיס של V מעל $\mathbb{R}$.