

אלגברה ב3

© ארזים

17 בנובמבר 2016

היינו באמצע הוכחת הקיום של המכפלה הטנזורית. נזכיר:
יהיו M, N מודולים מעל חוג R . נרצה לבנות מודול T מעל R יחד עם העתקה בילינארית
 $g : M \times N \rightarrow T$ כך שלכל מודול L מעל R והעתקה בילינארית $f : M \times N \rightarrow L$ קיים
ויחיד הומומורפיזם יחיד $f' : T \rightarrow L$ כך שמתקיים

$$f = f' \circ g$$

התבוננו במודול C , המודול החופשי שבסיסו $M \times N$. איברי C מסומנים בצורת סכומים
סופיים:

$$\xi = \sum r_\alpha (u_\alpha, v_\alpha)$$

כאשר $u_\alpha \in M, v_\alpha \in N, \alpha \in I$. ξ היא הפונקציה:

$$\begin{aligned}\xi(u_\alpha, v_\alpha) &= r_\alpha \\ \xi(u, v) &= 0\end{aligned}$$

הגדרנו את D להיות תת המודול של C הנוצר על ידי אוסף האיברים הבאים:

$$\begin{aligned}(u+v, w) - (u, w) - (v, w) \\ (u, v+w) - (u, v) - (u, w) \\ (ru, v) - r(u, v) \\ (u, rv) - r(u, v)\end{aligned}$$

הגדרנו את $T = D/C$. כעת נמשיך בהוכחה.

הוכחה: נסמן עבור $u \in M, v \in N$:

$$(u, v) + D = u \otimes v$$

קוראים u "טנזור v ". נגדיר

$$\begin{aligned} g : M \times N &\rightarrow T \\ g(u, v) &= u \otimes v \end{aligned}$$

מהגדרת D, g העתקה בילינארית. כעת, יהי L מודול מעל R ותהי $f : M \times N \rightarrow L$ העתקה בילינארית מעל R . נוכל להרחיב את f להומומורפיזם $\bar{f} : C \rightarrow L$ לפי

$$\bar{f}\left(\sum r_\alpha(u_\alpha, v_\alpha)\right) = \sum r_\alpha f(u_\alpha, v_\alpha)$$

ברור כי $\bar{f}$ הומומורפיזם של מודולים מעל R . כיוון שלקחנו f בילינארית, ברור כי $\bar{f}(D) = 0$. לכן $\bar{f}$ מגדיר הומומורפיזם $f' : C/D = T \rightarrow L$ על ידי

$$f'((u, v) + D) = \bar{f}(u, v) = f(u, v)$$

אבל למעשה כתוב

$$\begin{aligned} f'(u \otimes v) &= f(u, v) \\ f' \circ g &= f \end{aligned}$$

נראה את יחידות T, g . נניח כי T', g' זוג נוסף שמקיים את התכונה. נציב $L = T', f = g'$. אז קיים הומומורפיזם יחיד $j : T \rightarrow T'$ כך שמתקיים

$$j \circ g = g'$$

באותה צורה, על ידי חילופי תפקידים בין T, T' ובין g, g' , יש הומומורפיזם יחיד $j' : T' \rightarrow T$ כך שמתקיים

$$j' \circ g' = g$$

כעת נשים לב כי

$$(j' \circ j) \circ g = j' \circ g' = g$$

מהתכונה של T, g , מופעלת על עצמה, 1_T הוא ההומומורפיזם היחיד מתוך T אל T כך שמתקיים $1_T \circ g = g$, ולכן $j \circ j' = 1_T$. לכן j, j' הם איזומורפיזמים. ■

סימון המודול T מסומן $M \otimes_R N$, ונקרא המכפלה הטנזורית של המודולים M, N מעל R .

הערה 0.1 אם M נוצר על ידי $\{v_\alpha\}_{\alpha \in I}$, N נוצר על ידי $\{u_\beta\}_{\beta \in J}$, אזי $M \otimes_R N$ נוצר על ידי $\{v_\alpha, u_\beta\}_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}}$. בפרט, אם M, N נוצרים סופית מעל R , אזי $M \otimes_R N$ נוצר סופית מעל R .

הערה 0.2 ייתכן שיתקיים $M \neq 0, N \neq 0, M \otimes_R N = 0$. לדוגמא, נסתכל על $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ונראה כי

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$$

מספיק להראות על יוצרים, שהם מהצורה

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}\right) \otimes \left(\frac{u}{v} + \mathbb{Z}\right) &= \left(\frac{va}{vb} + \mathbb{Z}\right) \otimes \left(\frac{u}{v} + \mathbb{Z}\right) = v \left(\frac{a}{bv} + \mathbb{Z}\right) \otimes \left(\frac{u}{v} + \mathbb{Z}\right) = \\ &= \left(\frac{a}{bv} + \mathbb{Z}\right) \otimes (u + \mathbb{Z}) = \left(\frac{a}{bv} + \mathbb{Z}\right) \otimes 0 = 0 \end{aligned}$$

הערה 0.3 יהיו $U \subseteq M, V \subseteq N$. אז אפשר להתבונן במודולים $M \otimes_R N, U \otimes_R V$. יש הומומורפיזם ברור

$$\begin{aligned} i : U \otimes_R V &\rightarrow M \otimes_R N \\ i(u \otimes v) &= u \otimes v \end{aligned}$$

ייתכן כי i אינו חד־חד־ערכי. הסיבה לכך היא שעשוי להתקיים

$$D_{U \times V} \subsetneq C_{U \times V} \cap D_{M \times N}$$

דוגמא פשוטה: $U = 2\mathbb{Z}, M = \mathbb{Z}, V = N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$i : 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

מתקיים

$$i(2 \otimes 1) = 2 \otimes 1 = 2 \cdot 1 \otimes 1 = 2(1 \otimes 1) = 1 \otimes 2 \cdot 1 = 1 \otimes 0 = 0$$

כעת נראה כי $2 \otimes 1 \in 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. נגדיר תבנית

$$\begin{aligned} f : 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ f(2a, b) &= ab \end{aligned}$$

בפרט $f(2, 1) = 1$. יהי $f' : 2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ההומומורפיזם היחיד המקיים $f'(u \otimes v) = f(u, v)$. בפרט $f'(2 \otimes 1) = f(2, 1) = 1$, ולכן $2 \otimes 1 \neq 0$.

כמובן, אפשר לחזור על הבנייה גם להעתקות מולטילינאריות $f : M_1 \times \cdots \times M_K \rightarrow L$ שכולם מודולים מעל R , ולבנות את המכפלה הטנזורית

$$M_1 \otimes_R M_2 \otimes_R \cdots \otimes_R M_k$$

כך שיש הומומורפיזם יחיד $f' : M_1 \otimes_R \cdots \otimes_R M_k \rightarrow L$ המקיים $f'(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = f(v_1, \dots, v_k)$. בשיעור הבא נראה כי מתקיים למשל

$$(M \otimes_R N) \otimes_R L \cong M \otimes_R (N \otimes_R L) \cong M \otimes_R N \otimes_R L$$

$$M \otimes_R N \cong N \otimes_R M$$

$$R \otimes_R M \cong M$$