

אלגברה ב3

© ארזים

14 בנובמבר 2016

1 המשך - מודולים

משפט 1.1 יהי M מודול נוצר סופית מעל R . יהי $f \in \text{Hom}_R(M, M)$ כך שקיים אידאל $I \subseteq R$ בעבורו $f(M) \subseteq IM$. אזי מקיים משואה פולינומאלית מהצורה

$$f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\text{Id}_M = 0$$

כאשר $a_0, \dots, a_{n-1} \in I$.

הוכחה: נניח כי

$$M = \sum_{i=1}^n Rv_i$$

ונראה את

$$M^n = \bigoplus_{i=1}^n M$$

כמודול מעל $M_n(R[f])$. כעת נכתוב

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}v_j$$

כאשר $a_{ij} \in I$. לכן נקבל כי

$$\left(\begin{pmatrix} f & & \\ & \ddots & \\ & & f \end{pmatrix} - (a_{ij})_{i,j \leq n} \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $A = (a_{i,j})$. נכפיל במטריצה $\text{adj}(f \cdot I_n - A)$:

$$\det(fI_n - A) \cdot I_n \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

לכן לכל i מתקיים

$$\det(fI_n - A) \cdot v_i = 0$$

מתקיים למעשה

$$\begin{aligned} \det(fI_n - A) &\in \text{Hom}_R(M, M) \\ \det(fI_n - A) &= f^n + \alpha_{n-1}f^{n-1} + \dots + \alpha_1f + a_0 \end{aligned}$$

כאשר כמובן $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in I$. כעת, ההומומורפיזם הזה שולח כל אחד מהיוצרים v_i לאפס, ולכן זהו הומומורפיזם האפס, כנדרש. ■

מסקנה 1.2 יהי M מודול נוצר סופית מעל R , ויהי I אידאל כך שמתקיים $I \cdot M = M$. אזי

$$(1 + I) \cap \text{Ann}_R(M) \neq \emptyset$$

הוכחה: ניקח את $f = \text{Id}_M$. לפי הנתון, $f(M) = I \cdot M$. לכן יש $a_0, \dots, a_{n-1} \in I$ עבורם

$$f^n - a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0 = 0$$

לכן לכל $v \in M$ מתקיים

$$\begin{aligned} v + a_{n-1}v + \dots + a_1v + a_0v &= 0 \\ (1 + a_{n-1} + \dots + a_0)v &= 0 \end{aligned}$$

■ הסכום הזה הוא כמובן איבר של $1 + I$ והוא מאפס את כל המודול, כנדרש.

מסקנה 1.3 (הלמה של נאקאימה) יהי M מודול נוצר סופית מעל R , ויהי $I \subseteq J(R)$ אידאל. נניח כי $IM = M$. אזי $M = 0$.

הוכחה: מהמסקנה הקודמת, קיים $x \in I$ עבורו $(1+x)M = 0$. ולכן $x \in J(R)$, ולכן $1+x$ הוא איבר הפיד, ולכן $M = 0$. ■

מסקנה 1.4 יהי M מודול נוצר סופית מעל R . יהי N תת מודול של M , ויהי $I \subseteq J(R)$. נניח כי $M = IM + N$. אז $N = M$.

הוכחה: נתובנן במכפלה M/N . $I \cdot (M/N) = (IM + N)/N = M/N$. כמובן נוצר סופית מעל R , ולכן מהלמה של נאקאימה נקבל כי $M/N = 0$, כלומר $M = N$. ■

יהי R חוג מקומי בעל אידאל מקסימלי P . יהי M מודול נוצר סופית מעל R . נתבונן במודול $M/(PM) = R/P$ על ידי $\mathbb{K}$

$$(r + P)(v + PM) = rv + PM$$

לכן $M/(PM)$ הוא מודול נוצר סופית מעל $\mathbb{K}$. כלומר, $M/(PM)$ הוא מרחב ווקטורי סוף מימדי מעל $\mathbb{K}$.

כעת נלך בכיוון ההפוך. נניח כי $\overline{u_i} = u_i + PM$ הם בסיס של M/PM מעל $R/P = \mathbb{K}$. נרצה להראות שהקבוצה u_i יוצרת את M מעל R .

1.5 טענה

$$M = \sum_{i=1}^n Ru_i$$

הוכחה: נסמן

$$N = \sum_{i=1}^n Ru_i$$

ברור כי $N \subseteq M$. לכל $v \in M$ קיימים $r_1, \dots, r_n \in R$ כך שמתקיים

$$v + PM = \sum_{i=1}^n (r_i + P)(u_i + PM) = \sum_{i=1}^n r_i u_i + PM$$

לכן נקבל כי

$$v \in N + PM$$

ובסך הכל $M = PM + N$. מהמסקנה האחרונה נסיק כי $M = N$. ■

2 סדרות מדוייקות והפונקטורים $\text{Hom}_R(N, \cdot), \text{Hom}_R(\cdot, N)$

הגדרה 2.1 סדרה מדוייקת של מודולים מעל R נתונה על ידי

$$\cdots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} M_{i+2} \rightarrow \cdots$$

כאשר f_i הומומורפיזמים מעל R , וכן לכל R מתקיים

$$\text{Im} f_i = \ker f_{i+1}$$

דוגמא

1. $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M$ מדויקת אם ורק אם f חד־חד־ערכית.

2. $M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ מדויקת אם ורק g על.

3. סדרה קצרה מדויקת:

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

זו סדרה מדויקת אם ורק אם f חד־חד־ערכית, g על, וכן

$$\text{Im } f = \ker g$$

כמובן, g מגדיר איזומורפיזם

$$\text{Coker}(f) := M/f(M') \cong M''$$

טענה 2.2 נתונים מודולים M, M', M'' מעל R , והומומורפיזמים $f: M' \rightarrow M, g: M \rightarrow M''$.

1. הסדרה $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ מדויקת אם ורק אם לכל מודול N הסדרה $0 \rightarrow \text{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{g^*} \text{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_R(M', N)$ מדויקת.

2. הסדרה $0 \rightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$ מדויקת אם ורק אם לכל מודול N הסדרה $0 \rightarrow \text{Hom}_R(N, M') \xrightarrow{f_*} \text{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}_R(N, M'')$ מדויקת.

הוכחה: נראה את הסעיף הראשון, השני דומה ונשאר כתרגיל.

$\Leftarrow$: יהי N מודול. יש להראות ראשית כי g^* חד־חד־ערכית. נניח כי $\varphi \in \text{Hom}_R(M'', N)$ כך שמתקיים $g^*(\varphi) = 0$. אם כן מתקיים $\varphi \circ g = 0$, כלומר $\varphi(g(M)) = 0$, אבל g על, ולכן $\varphi(M'') = 0$, כלומר $\varphi = 0$.

ראינו כי $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$. כיוון שמתקיים $\ker g = \text{Im } f$, $g \circ f = 0$, ולכן $f^* \circ g^* = 0$. לכן בהכרח מתקיים $\text{Im}(g^*) \subseteq \ker(f^*)$. להיפך, נניח כי $\xi \in \ker(f^*)$, $\xi \in \text{Hom}_R(M, N)$. לכן נובע כי $\xi \circ f = 0$. לכן מתקיים $\xi(M') \subseteq \ker \xi$. כלומר, ξ מגדיר הומומורפיזם

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}: M/f(M') &\rightarrow N \\ \tilde{\xi}(m + f(M')) &= \xi(m) \end{aligned}$$

כזכור, g מגדיר איזומורפיזם

$$\begin{aligned} g': M/f(M') &\rightarrow M'' \\ g'(m + f(M')) &= g(m) \end{aligned}$$

כעת נגדיר $\varphi \in \text{Hom}_R(M'', N)$ על ידי

$$\varphi = \tilde{\xi} \circ (g')^{-1}$$

נבדוק שמתקיים

$$\begin{aligned} g^*(\varphi) &= \xi \\ \varphi \circ g &= \xi \\ \tilde{\xi} \circ (g')^{-1} \circ g &= \xi \end{aligned}$$

יהי $m \in M$, ונראה כי

$$\tilde{\xi}(g'^{-1}(g(m))) = \tilde{\xi}(m + f(M')) = \xi(m)$$

לכן $\xi \in \text{Im } g^*$, כלומר $\ker f^* \subseteq \text{Im } g^*$, וקיבלנו את השוויון, מה שאומר שהסדרה אכן מדויקת.

$\Rightarrow$ נראה כי g על. נסמן

$$N = M''/g(M)$$

ויהי

$$\begin{aligned} \nu : M'' &\rightarrow N \\ \nu(m) &= m + N \end{aligned}$$

הומומורפיזם המנה. כמובן מתקיים

$$\nu \circ g = 0 = g^*(\nu)$$

g^* חד-חד-ערכית, ולכן בהכרח $\nu = 0$, ואם הומומורפיזם המנה הוא 0, אזי המנה היא אפס - כלומר $M'' = g(M)$, כלומר g על.

כעת מתקיים $f^* \circ g^* = 0 = (g \circ f)^*$, ולכן $\varphi \circ (g \circ f) = 0$ לכל $\varphi : M'' \rightarrow N$. נבחר $R = M''$ וכן $\varphi = \text{Id}_{M''}$. נקבל כי $g \circ f = 0$, ולכן $\text{Im } f \subseteq \ker g$.

לבסוף, נתבונן במודול $N = M/f(M')$, ויהי $\nu : M \rightarrow N$ הומומורפיזם המנה. מתקיים

$$\begin{aligned} \nu \circ f &= 0 \\ f^*(\nu) &= 0 \\ \nu &\in \ker f^* = \text{Im } g^* \\ \nu &= g^*(\varphi), \varphi : M'' \rightarrow N \\ \nu &= \varphi \circ g \end{aligned}$$

אם $m \in \ker g$, אזי $m \in \ker \nu = f(M')$, כלומר $\ker g \subseteq \text{Im } f$, ובסך הכל קיבלנו את השוויון שרצינו, לכן הסדרה אכן מדויקת. ■

3 מכפלה טנזורית של מודולים

נניח כי N, M, L מודולים מעל R , ונניח כי $f : M \times N \rightarrow L$ תבנית בילינארית מעל R . ממנה נייצר הומומורפיזם $f' : M \otimes_R N \rightarrow L$ מעל R , אבל בשביל לעשות זאת נצטרך להגדיר מודול חדש, $M \otimes_R N$, ואז $f' : M \otimes_R N \rightarrow L$.

משפט 3.1 נתונים מודולים M, N מעל R , אזי קיימים מודול T מעל R והעתקה בילינארית $g : M \times N \rightarrow T$ כך שהתכונה הבאה מתקיימת:
לכל מודול L מעל R והעתקה בילינארית $f : M \times N \rightarrow L$ יש הומומורפיזם יחיד $f' : T \rightarrow L$ כך שמתקיים

$$f' \circ g = f$$

הזוג (T, g) נקבע ביחידות במובן הבא: אם יש זוג (T', g') עם אותה תכונה אזי יש איזומורפיזם יחיד $j : T \rightarrow T'$ כך שמתקיים $g' = j \circ g$.
במצב זה נאמר כי T היא המכפלה הטנזורית של M, N , ומסמנים $T = M \otimes_R N$.

הוכחה: קיום: יהי C המודול החופשי על הקבוצה $M \times N$: זאת קבוצת כל הפונקציות $f : M \times N \rightarrow R$, כך שמחוץ לקבוצה סופית של ערכים f מקבלת 0. נסמן $f = \sum_{i \in I} r_i \cdot \{m_i, n_i\}$, כאשר $|I| \in \mathbb{N}$, $\{m_i, n_i\}$ הם בדיוק הערכים עליהם הפונקציה לא מתאפסת, וכן $f(m_i, n_i) = r_i$.
נתבונן בתת המודול D הנוצר על ידי האיברים הבאים של C :

$$(u + v, w) - (u, w) - (v, w), (u, v + w) - (u, v) - (u, w), (ru, v) - r(u, v), (u, rv) - r(u, v)$$

■

$$T = C/D$$