

אלגברה ב3

© ארזים

10 בנובמבר 2016

1 מודולים

נמשיך להתעסק מעט עם מודולים באופן כללי.

הגדרה 1.1 יהי M מודול מעל R . יהי $U \subseteq M$ תת מודול. נתבונן באידאל הבא:

$$\text{Ann}_R(U) = \{r \in R \mid rU = 0\}$$

אידאל זה נקרא המאפס של U בתוך R . זהו כמובן אידאל של R .

דוגמא יהי V מרחב ווקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית מעל $\mathbb{F}$. ראינו כי T מגדירה על V מבנה של מודול מעל $\mathbb{F}[x]$ לפי

$$f(x) \cdot v = f(T)(v)$$

כעת, נתבונן באידאל

$$\text{Ann}_{\mathbb{F}[x]}(V) = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid f(T) = 0\} = \mathbb{F}[x] \cdot m_T(x)$$

כאשר $m_T(x)$ הוא הפולינום המינימלי של T .

אם $I \subseteq \text{Ann}_R(M)$ אידאל, אז M הוא מודול גם מעל R/I לפי

$$(r + I) \cdot v = rv$$

קל לראות כי

$$\text{Ann}_{R/I}(M) = \text{Ann}_R(M) / I$$

שכן

$$(r + I) \cdot M \iff r \cdot M = 0$$

הגדרה 1.2 נאמר כי M מודול נאמן מעל R אם מתקיים $\text{Ann}_R(M) = 0$.

1.1 מודולים נוצרים סופית

הגדרה 1.3 יהי M מודול מעל R , ותהי $S \subseteq M$. תת המודול הקטן ביותר של M שמכיל את S הוא

$$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i s_i \mid n \geq 1, \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq S, a_i \in R \right\} = \sum_{s \in S} R s$$

נקרא לו תת המודול הנוצר על ידי S . אם תת המודול הנוצר על ידי S הוא M , נאמר כי M נוצר על ידי S , ואם S סופית, נאמר כי M נוצר סופית.

הגדרה 1.4 תהי $\{M_i\}_{i=1}^k$ קבוצה של תת מודולים של M . נאמר שהסכום

$$\sum_{i=1}^k M_i$$

הוא סכום ישר אם הוא סכום ישר כתת חבורות חיבוריות, כלומר (הבאים שקולים):

1. $\sum v_i = 0$, כאשר $v_i \in M_i$, אם ורק אם $v_i = 0$ לכל i .

2. לכל i מתקיים

$$M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = 0$$

במקרה זה נסמן

$$\sum_{i=1}^k M_i = \bigoplus_{i=1}^k M_i$$

וכן מתקיים

$$\bigoplus_{i=1}^k M_i \cong \prod_{i=1}^k M_i$$

על ידי

$$\sum_{i=1}^k v_i \mapsto (v_1, \dots, v_k)$$

הגדרה 1.5 נניח כי קבוצה של מודולים שאינם מודול האפס מעל R . נגדיר את הסכום הישר של המודולים על ידי

$$\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha = \left\{ (v_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} M_\alpha \mid \exists \{\alpha_i\}_{i=1}^n \subseteq A. \forall \alpha \notin \{\alpha_i\}_{i=1}^n \quad v_\alpha = 0 \right\} \subseteq \prod_{\alpha \in A} M_\alpha$$

נוח לזהות את M_α , לכל α , כתת מודול על ידי כך שנתאים לכל $v_\alpha \in M_\alpha$ את $(u_\beta)_{\beta \in A}$ כאשר

$$u_\beta = \begin{cases} v_\alpha & \beta = \alpha \\ 0 & \beta \neq \alpha \end{cases}$$

כך נוכל לרשום כל $(v_\alpha) \in \bigoplus M_\alpha$ בצורה $\sum v_\alpha$.

למה 1.6 נניח כי הסכום הישר $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ נוצר סופית. אזי בהכרח A סופית.

הוכחה: תהי $v^1, \dots, v^k$ קבוצת יוצרים של הסכום הישר. אזי לכל $1 \leq i \leq k$, כשכותבים $v^i = (v_\alpha^i)_{\alpha \in A}$ אזי $v_\alpha^i = 0$ כמעט לכל $\alpha \in A$. נסמן

$$A' = \bigcup_{i=1}^k \{\alpha \in A \mid v_\alpha^i \neq 0\}$$

וכמובן שזו קבוצה סופית (איחוד סופי של קבוצות סופיות). ברור כי

$$\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in A'} M_\alpha$$

■

וזה מחייב $A = A'$, ולכן A סופית.

הגדרה 1.7 מודול M ייקרא מודול חופשי מעל R אם

$$M \cong \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$$

כאשר לכל $\alpha \in A$ מתקיים $M_\alpha \cong R$. אם M גם נוצר סופית, אזי A סופית, ונסמן $|A| = n$. נקבל

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^n R = R^n$$

טענה 1.8 M הוא מודול נוצר סופית אם ורק אם M הוא מנה של R^n עבור n טבעי כלשהו.

הוכחה: אם M נוצר סופית, אזי

$$M = \sum_{i=1}^n Rv_i$$

כעת, נגדיר

$$f : R^n \rightarrow M$$

לפי

$$f(r_1, \dots, r_n) = \sum_{i=1}^n r_i v_i$$

זהו אפימורפיזם של מודולים. לכן

$$R^n / \ker f \cong M$$

אם M מודול מנה של R^n , אז קיים תת מודול $U \subseteq R^n$ עבורו $R^n/U \cong M$. כעת, נרכיב עם ההומומורפיזם הטבעי $\pi : R^n \rightarrow R^n/U$ עם האייזומורפיזם הזה, ונסמן את ההרכבה בתור f . אזי $f : R^n \rightarrow M$ אפימורפיזם. נסמן בתור e_i את הווקטור בו כל קואורדינטה היא 0, פרט לקואורדינטה i , שהיא 1. אזי מתקיים בהכרח

$$M = \sum_{i=1}^n Rf(e_i)$$

שכן

$$\sum_{i=1}^n r_i f(e_i) = f\left(\sum_{i=1}^n r_i e_i\right) = f(r_1, \dots, r_n)$$

■

יהי M מודול מעל R . יהי $f \in \text{End}_R(M)$. ראינו כי M מודול מעל $R[f]$. לכל n טבעי, נתבונן בסכום הישר

$$\bigoplus_{i=1}^n M = M^n$$

זהו מודול מעל $M_n(R[f])$ בצורה הבאה: לכל $(a_{i,j})_{i,j=1}^n = A \in M_n(R[f])$ ולכל

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in M^n$$

$$A(v) = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ניזכר כי

$$M_n(R[f])^\times = \left\{ A \mid \det A \in R[f]^\times \right\}$$