

אלגברה ב3

© ארזים

7 בנובמבר 2016

הגדרה 0.1 נגדיר את רדיקאל יעקובסון של החוג R , $J(R)$, בתור חיתוך כל האידאלים המקסימליים של R . כמובן, הרדיקל הנילי מוכל ברדיקל יעקובסון - כל רדיקל מקסימלי הוא ראשוני.

טענה 0.2 אם $x \in J(R)$ אם ורק אם לכל $y \in R$ מתקיים $1 - xy \in R^*$.

הוכחה: נניח כי $x \in J(R)$. בשלילה, אם יש y עבורו $1 - xy$ אינו הפיך, אזי יש I אידאל מקסימלי עבורו $1 - xy \in I$. כיוון שמתקיים $x \in J(R) \subseteq I$, גם $xy \in I$. נקבל כי $1 \in I$ - בסתירה, כי $I \neq R$.

כעת, נניח כי $1 - xy \in R^*$ לכל $y \in R$. בשלילה, אם $x \notin J(R)$, אזי יש אידאל מקסימלי I עבורו $x \notin I$. כעת $I + Rx = R$. נכתוב $1 = u + rx$ כאשר $u \in I$, ואז $u = 1 - rx \in R^*$ ואז $u \in R^* \cap I$ - בסתירה, כי $I \neq R$. ■

הגדרה 0.3 חוג R ייקרא מקומי אם יש לו אידאל מקסימלי יחיד.

יהי מספר ראשוני p .

$$Z_p = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid n \right\}$$

זהו חוג ביחס לפעולות $\mathbb{Q}$. נשים לב כי

$$\begin{aligned} Z_p^* &= \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid n, m \right\} \\ Z_p \setminus Z_p^* &= \left\{ \frac{pm}{n} \in \mathbb{Q} \mid p \nmid n \right\} = Z_p \cdot p \end{aligned}$$

נסיים את הדוגמה בעזרת טענה כללית יותר.

טענה 0.4 נתון חוג R .

1. נניח כי $P \subseteq R$ אידאל כאשר $R \setminus R^* = P$. אזי חוג מקומי שבו P האידאל המקסימלי היחיד.

2. נניח כי R חוג מקומי, עם אידאל מקסימלי יחיד P . אזי $R \setminus R^* = P$.

3. נניח כי $P \subseteq R$ אידאל מקסימלי כך שמתקיים $1 + P \subseteq R^*$. אזי R חוג מקומי שבו P האידאל המקסימלי היחיד.

4. נניח כי R חוג מקומי, עם אידאל מקסימלי יחיד P . אזי $1 + P \subseteq R^*$.

הוכחה:

1. יהי $I \subsetneq R$ אידאל. לכן $I \subseteq R \setminus R^* = P$. לכן P מכיל את כל האידאלים $I \subsetneq R$, ולכן P הוא אידאל מקסימלי יחיד.

2. נניח כי $a \in R \setminus R^*$. לכן a שייך לאידאל מקסימלי כלשהו של R . כלומר $a \in P$. לכן $R \setminus R^* \subseteq P$. ההכלה השנייה נכונה תמיד לכל אידאל שאינו כל R , וזה המצב. לכן $R \setminus R^* = P$.

3. נניח כי $a \in R \setminus R^*$. נניח בשלילה כי $a \notin P$, אזי $P + Ra = R$. נכתוב $1 = u + ra$. עבור $u \in P$ נקבל כי $1 - u \in P \subseteq R^*$. נסיק כי a הפיך, אבל a אינו הפיך, בסתירה. לכן $R \setminus R^* \subseteq P$. לכן $R \setminus R^* = P$.

4. מתקיים $J(R) = P$. יהי $x \in P$. מהטענה הקודמת שראינו, נוכל לכתוב $1 + x =$ עבור $1 - x(-1) \in R^*$. לכן $1 + P \subseteq R^*$.

■

1 מודולים

1.1 מושגים ראשוניים

הגדרה 1.1 יהי R חוג. מודול M מעל R הוא חבורה חילופית (שתיכתב בסימון חיבורי), יחד עם פונקציה $R \times M \rightarrow M$ הממפה $(r, v) \mapsto r \cdot v$ כך שהתכונות הבאות מתקיימות:

1.

$$\forall x, y \in R, u \in M \quad (xy)u = x(yu)$$

2.

$$\forall u \in M \quad 1 \cdot u = u$$

3.

$$\forall x, y \in R, u \in M \quad (x + y) \cdot u = xu + yu$$

4.

$$\forall x \in R, u, v \in M \quad x(u + v) = xu + xv$$

הערה 1.2 מההגדרה נובע כי

$$\begin{aligned}\forall u \in M \quad 0 \cdot u &= 0 \\ \forall x \in R \quad x \cdot 0 &= 0 \\ \forall x \in R, u \in M \quad (-x) \cdot u &= x \cdot (-u) = -x \cdot u\end{aligned}$$

דוגמאות

1. מרחב ווקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ הוא מודול מעליו.
2. כל חבורה חילופית G היא מודול מעל $\mathbb{Z}$. נגדיר את הכפל בסקלר: לכל $g \in G$:

$$\begin{aligned}0 \cdot g &= 0 \\ n \cdot g &= g \cdot ((n-1) \cdot g), n > 0 \\ -n \cdot g &= -((-n) \cdot g)\end{aligned}$$

3. יהי V מרחב ווקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. תהי $T : V \rightarrow V$ העתקה לינארית מעל $\mathbb{F}$. T מגדירה מבנה של מודול מעל $\mathbb{F}[x]$, לפי

$$f(x) \cdot v = f(T)(v)$$

למעשה, כל מודול V מעל $\mathbb{F}[x]$ נראה כך. בפרט, כל מודול כזה הוא מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{F}$, כאשר משכנים את $\mathbb{F}$ בתוך $\mathbb{F}[x]$. נגדיר $T : V \rightarrow V$ על ידי

$$T(v) = x \cdot v$$

T כמובן לינארית מעל $\mathbb{F}$:

$$\begin{aligned}T(u+v) &= x(u+v) = xu + xv = T(u) + T(v) \\ T(\lambda u) &= x(\lambda u) = (\lambda x)u = \lambda(xu) = \lambda T(v)\end{aligned}$$

כמו כן,

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) \cdot v = \sum_{i=0}^n a_i T^i(v)$$

הגדרה 1.3 יהיו M, N מודולים מעל R . הומומורפיזם $f : M \rightarrow N$ מעל R הוא הומומורפיזם של החבורות החילופיות, כך שמתקיים

$$\forall r \in R, u \in M \quad f(ru) = rf(u)$$

נסמן את אוסף ההומומורפיזמים מהמודול M למודול N על ידי $\text{Hom}_R(M, N)$. לקבוצה זו יש מבנה של מודול מעל R :

$$\begin{aligned}\forall f_1, f_2 &\in \text{Hom}_R(M, N), u \in M, r \in R \\ (f_1 + f_2)(u) &= f_1(u) + f_2(u) \\ (r \cdot f_1)(u) &= r \cdot f_1(u)\end{aligned}$$

כאשר $N = M$, פעולת ההרכבה הופכת את $\text{Hom}_R(M, M) = \text{End}_R(M)$ לחוג (לחילופי).

נתבונן בחוג החלקי

$$R[f] = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i f^i \mid a_i \in R, n \geq 0 \right\}$$

זהו חוג חלקי וקומוטטיבי. M הוא גם מודול מעל $R[f]$:

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i f^i \right) u = \sum_{i=0}^n a_i f^i(u)$$

M הוא מודול מעל החוג הלא חילופי $\text{End}_R(M)$ גם כן, על ידי

$$f \cdot u = f(u)$$

כעת, נניח כי

$$\begin{aligned}\varphi : N &\rightarrow N' \\ \xi : M' &\rightarrow M\end{aligned}$$

הומומורפיזמים של מודולים מעל R . נגדיר

$$\begin{aligned}\varphi_* : \text{Hom}_R(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_R(M, N') \\ \varphi_*(f) &= \varphi \circ f \\ \xi^* : \text{Hom}_R(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_R(M', N) \\ \xi^*(f) &= f \circ \xi\end{aligned}$$

אלה הם הומומורפיזמים מעל R . נוכיח עבור אחד מהם: יהיו $u \in M, r \in R, f_1, f_2 \in \text{Hom}_R(M, N)$ אזי

$$\begin{aligned}\varphi_*(f_1 + f_2)(u) &= (\varphi(f_1 + f_2))(u) = \varphi((f_1 + f_2)(u)) = \varphi(f_1(u) + f_2(u)) = \\ &= \varphi(f_1(u)) + \varphi(f_2(u)) = \varphi_*(f_1)(u) + \varphi_*(f_2)(u) = \\ &= (\varphi_*(f_1) + \varphi_*(f_2))(u) \\ \varphi_*(r \cdot f)(u) &= (\varphi(r \cdot f))(u) = \varphi((rf)(u)) = \varphi(rf(u)) = r\varphi(f(u)) = (r\varphi_*(f))(u)\end{aligned}$$

טענה 1.4 יהיו הומומורפיזמים של מודולים

$$\begin{aligned}\varphi_1 : N &\rightarrow N', \varphi_2 : N' \rightarrow N'' \\ \xi_1 : M' &\rightarrow M, \xi_2 : M'' \rightarrow M'\end{aligned}$$

אזי מתקיים:

1.

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)_* = (\varphi_2)_* \circ (\varphi_1)_*, \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M, N'')$$

2.

$$(\xi_1 \circ \xi_2)^* = \xi_2^* \circ \xi_1^*, \text{Hom}_R(M, N) \rightarrow \text{Hom}_R(M'', N)$$

הוכחה: ההוכחות דומות מאוד. נראה את הסעיף השני. יהי $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ אזי

$$(\xi_1 \circ \xi_2)^*(f) = f \circ (\xi_1 \circ \xi_2) = (f \circ \xi_1) \circ \xi_2 = \xi_1^*(f) \circ \xi_2 = \xi_2^*(\xi_1^*(f)) = (\xi_2^* \circ \xi_1^*)(f)$$

■

הגדרה 1.5 יהי M מודול מעל החוג R . תת קבוצה לא ריקה של $U \subseteq M$ תקרא תת מודול אם U מודול מעל R ביחס לפעולות M כמודול מעל R .

הערה 1.6 בבירור, כמו במרחבים ווקטוריים, $U \subseteq M$ תת מודול אם ורק אם U סגורה ביחס לחיבור וביחס לכפל באיברי R .

דוגמא R הוא כמובן מודול מעל עצמו ביחס לפעולות החוג, ואז תת המודולים של R מעל עצמו הם האידיאלים של החוג.

נניח כי $U \subseteq M$ תת מודול. נתבונן בחבורת המנה M/U , ועליה יש מבנה של מודול מעל R , לפי

$$r(v + U) = rv + U$$

ההגדרה טובה כי אם $v + U = v' + U$ אזי $v - v' \in U$ ולכן $rv - rv' \in U$ ולכן $rv + U = rv' + U$.

כמובן שיש לנו את ההומומורפיזם הטבעי $f : M \rightarrow M/U$, המוגדר $f(v) = v + U$. זהו בבירור גם הומומורפיזם של מודולים מעל R , וכמובן שמתקיים $\ker f = U$. באופן כללי אם $f \in \text{Hom}_R(M, N)$ אזי $\ker f \subseteq M$ תת מודול, וכן $\text{Im} f \subseteq N$ תת מודול.

כמו כן מתקיים

$$M / \ker(f) \cong \text{Im}(f)$$

על ידי

$$v + \ker = f(v)$$

את זה אנחנו יודעים ברמת החבורות (משפט האיזומורפיזם הראשון), אבל ברור כי ההגדרה נותנת למעשה הומומורפיזם של מודולים. באופן כללי יש לנו את המשפטים הבאים, שמגיעים מחבורות.

משפט 1.7 (משפט ההתאמה) יהי $f \in \text{Hom}_f(M, N)$. יש התאמה חד-חד-ערכית ועל בין תתי מודולים U עבורם $\ker f \subseteq U \subseteq M$, לבין תתי מודולים V של התמונה, על ידי

$$\begin{aligned} U &\mapsto f(U) \\ V &\mapsto f^{-1}(V) \end{aligned}$$

ומתקיים עבור $\ker f \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq M$

$$\begin{aligned} U_2/U_1 &\cong f(U_2)/f(U_1) \\ u_2 + U_1 &\mapsto f(u_2) + f(U_1) \end{aligned}$$

מקרה פרטי נניח כי $L \subseteq M$ תת מודול, ובהומומורפיזם המנה:

$$\begin{aligned} f: M &\rightarrow M/L \\ f(v) &= v + L \end{aligned}$$

כל מודול של M/L הוא מהצורה U/L עבור $L \subseteq U \subseteq M$ תת מודול. U נקבע באופן יחיד, וכן אם $L \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq M$, אזי

$$U_2/U_1 \cong (U_2/L)/(U_1/L)$$

על ידי

$$u_2 + U_1 \rightarrow (u_2 + L) + U_1/L$$

משפט 1.8 (האיזומורפיזם השני) נניח כי $U, V \subseteq M$ תת מודולים. נגדיר

$$U + V = \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

זהו תת מודול של M , שבו U תת מודול, ואז מתקיים

$$(U + V) / U \cong V / (U \cap V)$$

על ידי

$$(u + v) + U \mapsto v + (U \cap V)$$

באופן כללי, לקבוצה $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ של תת מודולים של M נגדיר

$$\sum_{\alpha \in A} M_\alpha = \left\{ \sum_{i=1}^n v_{\alpha_i} \mid n \in \mathbb{N}, \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq A, v_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i} \right\}$$

זהו תת מודול של M שנקרא הסכום של $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$.
אם $I \subseteq R$ אידיאל, M מודול מעל R , נגדיר

$$I \cdot M = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \cdot v_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in I, v_i \in M \right\}$$

זהו תת מודול של M , וכמו כן M/IM מודול מעל R/I על ידי

$$(r + I)(v + IM) = rv + IM$$

וזה מוגדר היטב.