

אלגברה ב3

© ארזים

3 בנובמבר 2016

טענה 0.1 יהי R חוג. לכל אידאל $I \subsetneq R$ קיים אידאל מקסימלי המכיל את I . בפרט, יש בתוך R אידאל מקסימלי כלשהו (ניקח את המקרה הפרטי בו $I = 0$).

הוכחה: נסמן

$$S = \{J \subsetneq R \mid I \subseteq J \triangleleft R\}$$

S לא ריקה, שכן $I \in S$. תהי C שרשרת אידאלים מתוך S (ביחס להכלה). יהי

$$K = \bigcup_{j \in C} J$$

זהו אידאל (קל לבדוק, מתמשים בכך שהנחנו כי C שרשרת). כמו כן, $I \subseteq K$. בנוסף $1 \notin K$ (שכן $1 \notin J$ לכל $J \in S$), ולכן $K \subsetneq R$. K מכיל את כל איברי C (חסם מלעיל ביחס להכלה), ולכן מהלמה של צורן יש בקבוצה S איבר מקסימלי. נסמנו J . הוא אידאל מקסימלי בחוג R , כי אם יש אידאל $J' \subsetneq R$, אזי $J' \in S$, בסתירה למקסימליות של J . ■

מסקנה 0.2 נניח כי $a \in R$ איבר לא הפיך. אזי יש אידאל מקסימלי שמכיל את a - ניקח בטענה $I = (a) \subsetneq R$.

משפט 0.3 1. יהיו $P_1, \dots, P_n \subseteq R$ אידאלים ראשוניים, ויהי $I \subseteq R$ אידאל כך שמתקיים

$$I \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$$

אזי יש $1 \leq k \leq n$ עבורו $I \subseteq P_k$.

2. יהיו $I_1, \dots, I_n \subseteq R$ אידאלים, ויהי P אידאל ראשוני כך שמתקיים

$$P \supseteq \bigcap_{i=1}^n I_i$$

אזי יש $1 \leq k \leq n$ עבורו $P \supseteq I_k$.

הוכחה:

1. בלי הגבלת הכלליות נניח כי לכל $i \neq j$ מתקיים $P_i \not\subseteq P_j$. נבחר $a_{ij} \in P_i \setminus P_j$ לכל i, j . נגדיר, לכל j ,

$$a_j = \prod_{i \neq j=1}^n a_{ij}$$

$a_{ij} \in P_i$ לכל $i \neq j$, ולכן $a_j \in P_i$ לכל $i \neq j$. כמו כן, $a_j \notin P_j$, שכן P_j ראשוני, אבל a_j מכפלה של איברים שאינם שייכים אליו. נניח בשלילה כי $I \not\subseteq P_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. נבחר $b_i \in I \setminus P_i$ לכל i . נסמן

$$I \ni c = \sum_{i=1}^n a_i b_i = a_j b_j + \sum_{i \neq j=1}^n a_i b_i$$

ולכן $a_j b_j \notin P_j$, כי הוא אידאל ראשוני. לעומת זאת המחובר השני (הסכום) כן נמצא בתוך P_j , כי $a_i \in P_j$ לכל $i \neq j$. נסיק כי $c \in I \setminus P_j$ לכל j - בסתירה לכך שמתקיים

$$I \subseteq \bigcup_{j=1}^n P_j$$

2. בשלילה, נניח כי $I_k \not\subseteq P$ לכל k . נבחר $a_k \in I_k \setminus P$ לכל k . לכן $a_1 \cdot \dots \cdot a_n \notin P$. כי P ראשוני. מצד שני, מכפלה זו נמצאת בכל אחד מהאידאלים I_k , ולכן בחיתוך. קיבלנו סתירה לנתון

$$\bigcap_{j=1}^n I_j \subseteq P$$

■

הגדרה 0.4 יהי $I \subsetneq R$ אידאל. נגדיר את $\sqrt{I}$ (הרדיקל של I) בתור חיתוך כל אידאל הראשוניים המכילים את I . כמו כן, נגדיר $\sqrt{R} = R$. זהו אידאל, שכן הוא חיתוך של אידאלים.

משפט 0.5

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid \exists n \in \mathbb{N}. x^n \in I\}$$

הוכחה: אם $I = R$, המשפט ברור. נניח $I \subsetneq R$.
אם $x^n \in I$, אזי לכל P אידאל ראשוני שמכיל את I מתקיים $x^n \in P$, ולכן $x \in P$ - כי P ראשוני. לכן x נמצא בחיתוך כל האידאלים הראשוניים שמכילים את I , כלומר $x \in \sqrt{I}$.
כעת, יהי $x \in \sqrt{I}$, ונניח כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x^n \notin I$. נגדיר

$$S = \{I \subseteq J \triangleleft R \mid \forall n \in \mathbb{N} \ x^n \notin J\}$$

S לא ריקה, כי $I \in S$. נסדר אותה על ידי הכלה. קל לראות, מהלמה של צורן, שיש לה איבר מקסימלי (בדיוק כמו קודם - לכל שרשרת, איחוד איבריה הוא חסם מלעיל שלה), שנשמנו P . כמובן, $x \notin P$. נראה כי P אידאל ראשוני: נניח כי $a, b \notin P$. מכאן

$$P \subsetneq P + Ra, P + Rb$$

כיוון שלקחנו את P כאיבר מקסימלי מתוך S , חייב להתקיים $P + Ra, P + Rb \notin S$. לכן קיימים טבעיים m, n המקיימים $x^m \in P + Ra, x^n \in P + Rb$. מכאן,

$$x^{m+n} = (P + Ra)(P + Rb) \subseteq P + Rab$$

לכן, אם $ab \in P$, אזי $P + Rab = P$, ואז $x^{m+n} \in P$, בסתירה, כי $P \in S$. לכן $ab \notin P$, והוא אידאל ראשוני. בנוסף הוא מכיל את I , ולכן משתתף בחיתוך שמגדיר את $\sqrt{I}$. כלומר $\sqrt{I} \subseteq P$, לכן $\sqrt{I} \subseteq P$, כלומר $x \in \sqrt{I} \subseteq P$, בסתירה. ■

נתבונן במקרה הפרטי $I = 0$. כעת נקבל כי $\sqrt{0}$ הוא חיתוך כל האידאלים הראשוניים בחוג, וכן הוא קבוצת כל האיברים הנילפוטנטיים.

הגדרה 0.6 יהי R חוג. הרדיקל הנילי של R מוגדר להיות

$$\mathcal{N}(R) = \sqrt{0}$$

טענה 0.7 יהיו $I, J \subseteq R$ אידאלים.

$$1. \text{ אם } I^n \subseteq J \text{ (טבעי } n) \text{ אזי } \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}.$$

$$2. \sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}.$$

$$3. \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}.$$

$$4. \sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}.$$

$$5. \text{ יהי } P \text{ רדיקל ראשוני, אזי לכל } n \text{ טבעי, } \sqrt{P^n} = P.$$

הוכחה:

$$1. \text{ נניח כי } x \in \sqrt{I}. \text{ לכן קיים } m \text{ טבעי עבורו } x^m \in I, \text{ ואז } x^{mn} \in I^n \subseteq J, \text{ ומכאן } x \in \sqrt{J}.$$

2.

$$\begin{aligned} IJ &\subseteq I \cap J \subseteq I, J \\ \sqrt{IJ} &\subseteq \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \end{aligned}$$

נניח כי $x \in \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$, אזי קיימים m, n טבעיים עבורם $x^m \in I, x^n \in J$. לכן

$$x^{m+n} = x^m \cdot x^n \in IJ$$

לכן נובע כי $x \in \sqrt{IJ}$, ולכן

$$\sqrt{IJ} \subseteq \sqrt{I \cap J} \subseteq \sqrt{I} \cap \sqrt{J} \subseteq \sqrt{IJ}$$

ולכן כל ההכלות הן למעשה שוויונות.

3. ברור כי $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\sqrt{I}}$. נניח כי $x \in \sqrt{\sqrt{I}}$. יש n טבעי עבורו $x^n \in \sqrt{I}$, כלומר יש m טבעי עבורו $(x^n)^m = x^{nm} \in I$, לכן $x \in \sqrt{I}$.

4. ברור כי

$$\begin{aligned} I + J &\subseteq \sqrt{I} + \sqrt{J} \\ \sqrt{I + J} &\subseteq \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}} \end{aligned}$$

כעת,

$$\begin{aligned} \sqrt{I}, \sqrt{J} &\subseteq \sqrt{I + J} \\ \sqrt{I} + \sqrt{J} &\subseteq \sqrt{I + J} \\ \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}} &\subseteq \sqrt{\sqrt{I + J}} = \sqrt{I + J} \end{aligned}$$

5. אם $x \in P$, אזי $x^n \in P^n$, ולכן $x \in \sqrt{P^n}$. לכן $P \subseteq \sqrt{P^n}$. כיוון שהנחנו כי P אידאל, $P^n \subseteq P$, ולכן $\sqrt{P^n} \subseteq \sqrt{P}$. נראה כי $\sqrt{P} = P$. אם $x^n \in P$ (n טבעי), אזי מראשוניות, $x \in P$, ולכן $\sqrt{P} \subseteq P$, ולכן $\sqrt{P} = P$ (ההכלה השנייה תמיד נכונה).

■