

בהינתן $\alpha \in O_X(V)$, התמונה של α בתוך $O_X(U)$ היא $\alpha|_U$. נסמן

$$\alpha|_U = r_{V,U}(\alpha)$$

ההכלה שלמעלה, לאחר הרכבה עם הזיהויים כפונקציות שראינו על V ועל U , הופכת להומומורפיזם הצמצום. כאן, $r_{V,U}$ חד־חד־ערכית. ברור כי

$$r_{U,U} = \text{Id}_U$$

וכן כי אם $U_1 \subseteq U_2 \subseteq U_3 \subseteq X$ אזי

$$r_{U_2,U_1} \circ r_{U_3,U_2} = r_{U_3,U_1}$$

הגדרה 1.2 עבור $f \in F[X]$, נגדיר

$$D_X(f) = X \setminus V_X(f) = \{a \in X \mid f(a) \neq 0\}$$

קבוצה כזו נקראת קבוצה פתוחה ראשית.

ברור כי:

$$D_X(1) = X, D_X(0) = \emptyset$$

$$D_X(fg) = D_X(f) \cap D_X(g)$$

$$D_X(f^k) = D_X(f)$$

טענה 1.3 תהי $U \subseteq X$ פתוחה. אזי U היא איחוד סופי של קבוצות פתוחות ראשיות.

הוכחה: תהי $Y = X \setminus U$ - סגורה. ראינו כי $Y = V_X(I)$, כאשר $I \subseteq F[X]$ אידאל (רדיקלי). I נוצר סופית:

$$I = \sum_{i=1}^l F[X] f_i$$

לכן

$$V_X(I) = \bigcap_{i=1}^l V_X(f_i)$$

$$U = X \setminus V_X(I) = \bigcup_{i=1}^l (X \setminus V_X(f_i)) = \bigcup_{i=1}^l D_X(f_i)$$

■

טענה 1.4 תהי $\alpha \in O_X(U)$. לכל $z_0 \in U$, יש $f, g \in F[X]$ כך שמתקיים $g(z_0) \neq 0$, וכן לכל $z \in V = U \cap D_X(g)$

$$\alpha(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

הוכחה: נכתוב $\alpha = \frac{f}{g}$, כאשר $f, g \in F[x]$, $g(z_0) \neq 0$. כיוון שמתקיים $g(z) \neq 0$, לכל $z \in V$

$$\alpha(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

■

טענה 1.5 נניח כי

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

כיסוי פתוח של $U \subseteq X$. נניח כי לכל $\alpha \in A$ נתונה $f_\alpha \in O_X(U_\alpha)$ כל שלכל $\alpha, \beta \in A$ מתקיים

$$f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\beta \cap U_\alpha}$$

אזי יש $f \in O_X(U)$ יחיד כך שמתקיים

$$f|_{U_\alpha} = f_\alpha$$

לכל $\alpha \in A$.

הוכחה: בהינתן $\alpha, \beta \in A$ נבחר $z_{\alpha, \beta} \in U_\alpha \cap U_\beta$ ונכתוב

$$f_\alpha = \frac{a_\alpha}{b_\alpha}, f_\beta = \frac{a_\beta}{b_\beta}$$

כאשר $a_\alpha, b_\alpha, a_\beta, b_\beta \in F[X]$, וכן $b_\alpha(z_{\alpha,\beta}), b_\beta(z_{\alpha,\beta}) \neq 0$. לפי הטענה הקודמת, נקבל

$$\frac{a_\alpha(z)}{b_\alpha(z)} = \frac{a_\beta(z)}{b_\beta(z)}$$

לכל $X_{\alpha,\beta} =: D_X(b_\alpha) \cap D_X(b_\beta)$. לכן הפונקציה

$$\frac{a_\alpha}{b_\alpha} - \frac{a_\beta}{b_\beta}$$

מתאפסת על הקבוצה הפתוחה $X_{\alpha,\beta}$. לכן נקבל כי $\frac{a_\alpha}{b_\alpha} = \frac{a_\beta}{b_\beta}$ כאיברים בתוך $F(X)$, כלומר

$$a_\alpha b_\beta = a_\beta b_\alpha$$

נקבע שרירותית $\alpha_0 \in A$, ונגדיר $f = \frac{a_{\alpha_0}}{b_{\alpha_0}} \in F(X)$ לפי איזשהו ייצוג של f_{α_0} . יהי $\alpha \in A$, ותהי $z \in U_\alpha$. נכתוב

$$f_\alpha = \frac{a_\alpha}{b_\alpha}$$

כאשר $b_\alpha(z) \neq 0$. לפי מה שראינו,

$$\frac{a_{\alpha_0}}{b_{\alpha_0}} = \frac{a_\alpha}{b_\alpha} \in F(X)$$

לכן לפי ההגדרה

$$f(z) = \frac{a_\alpha(z)}{b_\alpha(z)} = f_\alpha(z)$$

■

ולכן $f|_{U_\alpha} = f_\alpha$.

לסיכום, ראינו שבהינתן $U \subseteq V$ קבוצות פתוחות יש לנו הומומורפיזם

$$r_{V,U} : O_X(V) \rightarrow O_X(U)$$

ומתקיימות התכונות:

$$1. r_{U,U} = \text{Id}_U$$

$$2. r_{U_2,U_1} \circ r_{U_3,U_2} = r_{U_3,U_1}$$

3. לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ וכיסוי פתוח $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, בהינתן $f_\alpha \in O_X(U_\alpha)$ לכל $\alpha \in A$ עם $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\beta \cap U_\alpha}$ לכל $\alpha, \beta \in A$, קיימת $f \in O_X(U)$ יחידה עם $r_{U,U_\alpha}(f) = f_\alpha$ לכל $\alpha \in A$.

הגדרה 1.6 במצב זה, אומרים שהזוג (X, O_X) הוא אלומה מעל המרחב הטופולוגי X . לאלומה כזו קוראים יריעה אפינית.

משפט 1.7 תהי $f \in F[X]$, $f \neq 0$. אזי

$$O_X(D_X(F)) = F[X]_f = \left\{ \frac{g}{f^k} \mid g \in F[X], k \in \mathbb{N} \right\}$$

הוכחה: ברור כי $\frac{g}{f^k} \in O_X(D_X(f))$, לכל $k \geq 0$ ולכל $g \in F[X]$. לכן

$$F[X]_f \subseteq O_X(D_X(f))$$

להיפך, תהי $\alpha \in O_X(D_X(f))$. נגדיר

$$B = \{g \in F[X] \mid g\alpha \in F[X]\}$$

זהו אידאל של $F[X]$. תהי $z \in D_X(f)$. נכתוב

$$\alpha = \frac{h}{g}$$

כאשר $h, g \in F[X]$, $g(z) \neq 0$. כעת, $g\alpha = h$, ולכן $g \in B$. לכן $z \notin V_X(B)$. בסך הכל קיבלנו

$$D_X(f) \subseteq X \setminus V_X(B)$$

כלומר

$$\begin{aligned} X \setminus V_X(f) &\subseteq X \setminus V_X(B) \\ V_X(f) &\supseteq V_X(B) \end{aligned}$$

מכאן נקבל

$$\begin{aligned} I_X(V_X(f)) &\subseteq I_X(V_X(B)) \\ \sqrt{F[X]f} &\subseteq \sqrt{B} \\ f &\in \sqrt{B} \end{aligned}$$

יש k עבורו $f^k \in B$, כלומר $f^k \alpha \in F[X]$, כלומר $\alpha \in \frac{F[X]}{f^k} \subseteq F[X]_f$. ■

מסקנה 1.8

$$O_X(X) = F[X]$$

הוכחה: נקח $f = 1$ במשפט:

$$D_X(1) = X$$

$$F[X]_1 = F[X]$$

■