

אלגברה ב3

© ארזים

23 בינואר 2017

1 גיאומטריה אלגברית

בהינתן $X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית, הגדרנו

$$F[X] = F[x_1, \dots, x_n] / I(X)$$

לאידאל $I \subseteq X$ נגדיר

$$V_X I = \{a \in X \mid \forall f \in I \ f(a) = 0\}$$

ולקבוצה חלקית $Y \subseteq X$, נגדיר

$$I_X(Y) = \{\varphi \in F[x] \mid \varphi(Y) = 0\} \subseteq F[x]$$

זהו אידאל. מקרה פרטי: $Y = \{z\}, z \in X$. נסמן

$$I_x\{z\} = M_z$$

זהו אידאל מקסימלי:

$$M_z = \{\varphi \in F[x] \mid \varphi(z) = 0\} = \ker(\varphi \rightarrow \varphi(z))$$

ההעתקה שבסוף היא אפימורפיזם לשדה. נסמן $\text{Max}(F[x])$ את קבוצת האידאלים המקסימליים של $F[x]$.

1.1 טענה

1. ההתאמה $z \rightarrow M_z$, שמתאימה את איברי X לאיברי $\text{Max}(F[x])$, היא חד־חד־ערכית ועל.

2. $I \subseteq M_z$ אם ורק אם $z \in V_x(I)$.

3. הקבוצות הסגורות בתוך X הן בדיוק כל הקבוצות מהצורה $V_X(I)$.

הוכחה:

1. ראינו כבר כי M_z אידאל מקסימלי לכל z . להיפך, נניח כי $J \subseteq F[x]$ אידאל מקסימלי. יש לו הצורה $J = J'/I(X)$, כאשר $J' \subseteq I(X) \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$ אידאל מקסימלי של $F[x_1, \dots, x_n]$. לכן יש $z \in F^n$ כך שמתקיים

$$J' = I(\{z\})$$

כעת, $I(X) \subseteq I(\{z\})$, ולכן

$$\{z\} = V(I(\{z\})) \subseteq V(I(X)) = X$$

$$z \in X$$

אם כן,

$$J = I(\{z\})/I(X) = M_z$$

לבסוף, אם $M_{z_1} = M_{z_2}$ עבור $z_1, z_2 \in X$ אזי

$$I(\{z_1\})/I(X) = I(\{z_2\})/I(X)$$

$$I(\{z_1\}) = I(\{z_2\})$$

$$\{z_1\} = V(I(\{z_1\})) = V(I(\{z_2\})) = \{z_2\}$$

$$z_1 = z_2$$

2. $z \in V_X(I)$ אם ורק אם $f(z) = 0$ לכל $f \in I$, אם ורק אם $f \in M_z$ לכל $f \in I$, אם ורק אם $I \subseteq M_z$.

3. נניח כי $I \subseteq F[X]$. אזי

$$I = J/I(X)$$

כאשר $I(X) \subseteq J$ אידאל של $F[x_1, \dots, x_n]$. אזי

$$V_X(I) = \{a \in X \mid \forall f \in I \ f(a) = 0\} = \{a \in X \mid \forall \varphi \in J \ \varphi(a) = 0\} = X \cap V(J) = V(J)$$

להיפך, תהי $Y \subseteq X$ סגורה בתוך X (ולכן סגורה). נכתוב $Y = V(J)$, כאשר J אידאל רדיקלי של $F[x_1, \dots, x_n]$. אזי

$$V(J) = Y \subseteq X$$

לכן $Y = X \cap V(J)$ כעת,

$$J = \sqrt{J} = I(V(J)) \supseteq I(X)$$

מכאן

$$Y = Y \cap X = X \cap V(J) = V_X(J/I(X))$$

וזוהו אידיאל של $F[X]$.

■

טענה 1.2 באותם סימונים כמו קודם:

1. לכל אידיאל $I \subseteq F[X]$ מתקיים

$$I_X(V_X(I)) = \sqrt{I}$$

2. לכל תת קבוצה $Y \subseteq X$ מתקיים

$$V_X(I_X(Y)) = \overline{Y}$$

נעיר שהסגור של Y בתוך X שווה לסגור של Y בתוך F^n .

הוכחה:

1. נכתוב $I = J/I(X)$, כאשר $J \subseteq F[x_1, \dots, x_n]$ אידיאל. ראינו כי $V_X(I) = V(J)$. אזי

$$I_X(V_X(I)) = I_X(V(J)) = I(V(J))/I(X) = \sqrt{J}/I(X) = \sqrt{J/I(X)} = \sqrt{I}$$

2.

$$V_X(I_X(Y)) = V_X(I(Y)/I(X)) = X \cap V(I(Y)) = V(I(Y)) = \overline{Y}$$

■

מסקנה 1.3 ההתאמה $Y \mapsto I_X(Y)$ היא התאמה חד-חד-ערכית ועל מקבוצת הקבוצות הסגורות בתוך X לקבוצת האידיאלים הרדיקליים באלגברה $F[X]$. ההתאמה ההפוכה היא

$$V_X(I) \leftrightarrow I = \sqrt{I}$$

טענה 1.4 תהי $X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית. אזי X אי פריקה אם ורק אם האלגברה $F[X]$ היא תחום שלמות.

הוכחה: X אי פריקה אם ורק אם $I(X)$ ראשוני, כלומר אם ורק אם $F[X] = F[x_1, \dots, x_n] / I(X)$ תחום שלמות. ■

טענה 1.5 תהי $X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית אי פריקה. תהי $\varphi \in F[X]$. נניח כי φ מתאפסת על קבוצה פתוחה $U \subseteq X$, $\emptyset \neq U$. אזי $\varphi = 0$.

הוכחה: לפי הנתון, $\varphi \in I_X(U)$. לכן

$$X \supseteq V_X(\varphi) \supseteq V(I_X(U)) = \bar{U} = X$$

השוויון האחרון מתקיים משום שנתון כי X אי פריקה, ולכן כל קבוצה פתוחה היא צפופה. מכאן,

$$V_X(\varphi) = X$$

כלומר, $\varphi(X) = 0$, היינו כלומר $\varphi = 0$. ■

1.1 מורפיזמים

הגדרה 1.6 תהיינה $X_1 \subseteq F^{n_1}$, $X_2 \subseteq F^{n_2}$ קבוצות אלגבריות. נאמר כי פונקציה $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ היא מורפיזם אם קיימים פולינומים

$$f_1(x), \dots, f_{n_2}(x) \in F[x_1, \dots, x_{n_1}]$$

כך שלכל $a \in X_1$ מתקיים

$$\varphi(a) = (f_1(a), \dots, f_{n_2}(a))$$

כלומר, φ היא צמצום של הפונקציה $\varphi' : F^{n_1} \rightarrow F^{n_2}$ המוגדרת על ידי $\varphi'(a) = (f_1(a), \dots, f_{n_2}(a))$.

φ שכזו מגדירה הומומורפיזם של אלגבראות

$$\varphi^* : F[X_2] \rightarrow F[X_1]$$

על ידי

$$\varphi^*(g) = g \circ \varphi$$

בסימונים שלעיל, מתקיים

$$g \circ \varphi(a) = g(\varphi(a)) = g(f_1(a), \dots, f_{n_2}(a))$$

נכתוב $g = \xi + I(X_2)$, ואז נקבל

$$g \circ \varphi(a) = \xi(f_1(a), \dots, f_{n_2}(a)) \leftrightarrow \xi(f_1(a), \dots, f_{n_2}(a)) + I(X_2)$$

משפט 1.7 יהי $\lambda : F[X_2] \rightarrow F[X_1]$ הומומורפיזם של אלגבראות מעל F . אזי יש מורפיזם יחיד $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ כך שמתקיים $\lambda = \varphi^*$.

הוכחה: נסמן $\bar{t}_i = t_i + I(X_2)$ כאשר

$$F[x_2] = F[t_1, \dots, t_{n_2}] / I(X_2)$$

נסמן

$$\lambda(\bar{t}_i) = \varphi_i = f_i(x) + I(X_1)$$

כאשר

$$F[x_1] = F[x_1, \dots, x_{n_1}] / I(X_1)$$

נגדיר

$$\begin{aligned} \varphi' : F^{n_1} &\rightarrow F^{n_2} \\ \varphi'(a) &= (f_1(a), \dots, f_{n_2}(a)) \end{aligned}$$

נראה כי לכל $a \in X_1$ מתקיים $\varphi'(a) \in X_2$. לשם כך, נראה כי לכל $\xi \in I(X_2)$ מתקיים

$$\xi(\varphi'(a)) = 0$$

נחשב:

$$\xi(\varphi'(a)) = \xi(\varphi_1(a), \dots, \varphi_{n_2}(a)) = \xi(\lambda(\bar{t}_1)(a), \dots, \lambda(\bar{t}_{n_2})(a))$$

נוכל לכתוב

$$\xi(t) = \sum a_{i_1, \dots, i_{n_2}} t_1^{i_1} \cdots t_{n_2}^{i_{n_2}}$$

ואז

$$\begin{aligned}\bar{\xi} &= \xi(t) + I(X_2) = \sum a_{i_1, \dots, i_{n_2}} \bar{t}_1^{n_1} \dots \bar{t}_{n_2}^{i_{n_2}} = \bar{\xi}(\lambda(\bar{t}_1), \dots, \lambda(\bar{t}_{n_2})) = \\ &= \sum a_{i_1, \dots, i_{n_2}} \varphi_1^{i_1} \dots \varphi_{n_2}^{i_{n_2}}\end{aligned}$$

לכן נקבל

$$\xi(\varphi'(a)) = \xi(\lambda(\bar{t}_1), \dots, \lambda(\bar{t}_{n_2})) = \lambda(\bar{\xi})(a) = \lambda(0)(a) = 0$$

נגדיר $\varphi = \varphi'|_{X_1}$, ולכן $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$. מהגדרת φ' , ברור כי φ מורפיזם. מה שהראינו למעלה מראה כי עבור $g = \bar{\xi} \in F[x_2]$,

$$\lambda(g) = g \circ \varphi$$

כלומר $\lambda = \varphi^*$.

אם $\psi: X_1 \rightarrow X_2$ כך שמתקיים $\varphi^* = \psi^*$, אזי

$$\varphi_i = \bar{t}_i \circ \varphi = \varphi^*(t_i) = \psi^*(t_i) = \bar{t}_i \circ \psi = \psi_i$$

כאשר

$$\psi(a) = (\psi_1(a), \dots, \psi_{n_2}(a)) \in X_2 \subseteq F^{n_2}$$

לכן נקבל כי

$$\varphi(a) = \psi(a)$$

■

לכל $a \in X_1$.

הערה 1.8 בעצם הראינו, במונחים קטגוריים שלא נרחיב עליהם כאן,

$$\text{Mor}(X_1, X_2) \cong \text{Hom}_F(F[x_2], F[x_1])$$

טענה 1.9 נניח כי $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ מורפיזם. אזי φ רציף.

הוכחה: תהי $Y_2 \subseteq X_2$ קבוצה סגורה. ראינו כי $Y_2 = V(J_2)$ כאשר $J_2 \subseteq I(X_2)$.
 $F[t_1, \dots, t_{n_1}]$
 כעת,

$$\varphi^{-1}(Y_2) = \{a \in X_1 \mid \varphi(a) \in Y_2\} = \{a \in X_1 \mid \forall \xi \in J_2 \quad \xi(f_1(a), \dots, f_{n_2}(a)) = 0\}$$

יהי $J_1 \subseteq F[x_1, \dots, x_{n_1}]$ האידאל הנוצר על ידי הפולינומים $(f_1(x), \dots, f_{n_2}(x))$,
 כאשר $\xi \in J_2$. אזי נקבל

$$\varphi^{-1}(Y_2) = X_1 \cap V(J_1)$$

■

כלומר זו קבוצה סגורה, ולכן φ רציפה.

הערה 1.10 אם $X_1 \xrightarrow{\varphi} X_2 \xrightarrow{\psi} X_3$ מורפיזמים של קבוצות אלגבריות, אזי $\psi \circ \varphi : X_1 \rightarrow X_3$ מורפיזם, וכן X_2

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$$

את זה קל לראות.

הגדרה 1.11 שתי קבוצות אלגבריות X_1, X_2 תקראנה איזומורפיות אם יש מורפיזמים

$$\varphi_1 : X_1 \rightarrow X_2$$

$$\varphi_2 : X_2 \rightarrow X_1$$

כך שמתקיים

$$\varphi_2 \circ \varphi_1 = \text{id}_{X_1}$$

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 = \text{id}_{X_2}$$

זה כמובן שקול לכך שהאלגבראות המתאימות איזומורפיות:

$$\varphi_2^* \circ \varphi_1^* = (\varphi_1 \circ \varphi_2)^* = \text{id}_{X_2}^* = \text{id}_{F[X_2]}$$

$$\varphi_1^* \circ \varphi_2^* = (\varphi_2 \circ \varphi_1)^* = \text{id}_{X_1}^* = \text{id}_{F[X_1]}$$

דוגמה נניח כי $\text{char} F = p$ (ראשוני). נתבונן בפונקציה

$$\varphi : F \rightarrow F$$

$$\varphi(a) = a^p$$

φ חד-חד-ערכי ועל (אוטומורפיזם של שדות). כעת,

$$\varphi^*(F[x]) = F[x^p] \subsetneq F[x]$$

לכן φ^* אינו אוטומורפיזם של $F[x]$.

1.2 יריעות אפיניות

כאן נניח כי הקבוצות האלגבריות איתן אנחנו עובדים הן אי פריקות. תהי $X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית אי פריקה. אנו יודעים כי $F[X]$ תחום שלמות. נסמן את שדה המנות בתור $F(X)$. תהי $z \in X$. נסמן את הלוקליזציה של $F[X]$ באידאל המקסימלי M_z בתור

$$\mathcal{O}_z = F[X]_{M_z} \subseteq F(X)$$

$$\mathcal{O}_z = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in F[X], g(z) \neq 0 \right\}$$

זאת תת אלגברה מעל F של השדה $F(X)$ והיא מכילה את $F[X]$. תהי $U \subseteq X$ תת קבוצה פתוחה בתוך X . נגדיר

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{z \in U} \mathcal{O}_z$$

זו גם תת אלגברה מעל F של $F(X)$, שמכילה את $F[X]$. אנו נחשוב על איברי $\mathcal{O}_X(U)$ כפונקציות על U (עם ערכים בשדה F). נניח כי $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$. יהי $z \in U$. כלומר אפשר להציג (בתוך $F(X)$):

$$\alpha = \frac{f}{g}$$

עבור $f, g \in F[X], g(z) \neq 0$. נגדיר

$$\alpha(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

נוכיח שההגדרה טובה: אם $\alpha = \frac{f'}{g'}$ כאשר $f', g' \in F[X], g'(z) \neq 0$, אזי

$$\alpha = \frac{f}{g} = \frac{f'}{g'} \in F(X)$$

לכן נקבל כי

$$fg' = gf'$$

$$f(z)g'(z) = f'(z)g(z)$$

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)}{g'(z)}$$

מותר לחלק שכן מתקיים $g(z), g'(z) \neq 0$. צריך להראות גם כי אם $\alpha(z) = 0$ לכל $z \in U$, אזי $\alpha = 0$. את זה נשאיר כתרגיל, ונגלה את התשובה בשיעור הבא.