

אלגברה ב3

© ארזים

19 בינואר 2017

1 צעדים קטנטנים ראשונים בגיאומטריה אלגברית

טענה 1.1 תהייה $0 \neq Y \subseteq X \subseteq F^n$ תת קבוצות. אזי Y אי פריקה אם ורק אם הסגור של Y בתוך X קבוצה אי פריקה.

הוכחה: נסמן בתור $\bar{Y}$ את הסגור של Y בתוך X .
נניח כי Y אי פריקה, ונניח כי $\bar{Y} = Y_1 \cup Y_2$ כאשר Y_1, Y_2 סגורות בתוך $\bar{Y}$ (ולכן גם בתוך X). כעת,

$$Y = Y \cap \bar{Y} = (Y \cap Y_1) \cup (Y \cap Y_2)$$

וכמובן ששני המאוחדים הם קבוצות סגורות בתוך Y . לכן, בלי הגבלת הכלליות,

$$\begin{aligned} Y &= Y \cap Y_1 \\ Y &\subseteq Y_1 \end{aligned}$$

לכן,

$$\bar{Y} \subseteq \bar{Y}_1 = Y_1$$

ומכאן

$$\bar{Y} = Y_1$$

לכן קיבלנו כי $\bar{Y}$ אי פריקה.
בכיוון השני, נניח כי $\bar{Y}$ אי פריקה, ונניח כי $Y = Y_1 \cup Y_2$, כאשר Y_1, Y_2 סגורות בתוך Y . לכן קיימות $C_1, C_2 \subseteq X$ סגורות בתוך X כך שמתקיים

$$Y_i = Y \cap C_i$$

לכן

$$Y \subseteq C_1 \cup C_2$$

אגף ימין היא קבוצה סגורה בתוך X , ולכן

$$\bar{Y} \subseteq C_1 \cup C_2$$

לכן נקבל

$$\bar{Y} = (\bar{Y} \cap C_1) \cup (\bar{Y} \cap C_2)$$

וכמוכן ששני המאוחדים הם קבוצות סגורות בתוך $\bar{Y}$. לכן, בלי הגבלת הכלליות, מתקיים

$$\bar{Y} = \bar{Y} \cap C_1$$

$$\bar{Y} \subseteq C_1$$

מכאן נקבל

$$Y \subseteq C_1$$

ולכן

$$Y_1 = Y \cap C_1 = Y$$

■

ולכן נקבל כי Y אי פריקה.

משפט 1.2 תהי $X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית לא ריקה. אזי יש בתוך X מספר סופי של תת קבוצות אי פריקות מקסימליות ואלה מכסות את X .

הוכחה: מהטענה, תת קבוצה Y של X אי פריקה מקסימלית היא סגורה, כי גם $\bar{Y} \subseteq X$ היא אי פריקה, וכן $Y \subseteq \bar{Y}$, ולכן $Y = \bar{Y}$. נראה כי כל תת קבוצה אלגברית של X היא איחוד סופי של תת קבוצות אי פריקות וסגורות.

נניח בשלילה שזה לא נכון. נתבונן בקבוצת כל תת הקבוצות האלגבריות של X שאינן ניתנות לכתיבה כאיחוד סופי שכזה. כיוון שהמרחב X הוא מרחב נתר, יש בקבוצה הזו איבר מיינימלי Z . בהכרח פריקה, ולכן ניתן לכתוב $Z = Z_1 \cup Z_2$ כאשר $Z_1, Z_2 \subsetneq Z$ וסגורות בתוך Z - ולכן סגורות בתוך X . ממיינימליות Z , כל אחת מבין Z_1, Z_2 ניתן לכתוב כאיחוד סופי שכזה, ולכן גם Z - בסתירה.

נכתוב $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$ כאשר $X_1, \dots, X_n$ סגורות ואי פריקות. נניח, בלי הגבלת הכלליות, כי אין אף הכלה בין X_i, X_j כלשהן. תהי $Y \subseteq X$ תת קבוצה אי פריקה. נכתוב

$$Y = (Y \cap X_1) \cup \dots \cup (Y \cap X_n)$$

כאשר כל מאוחד הוא סגור בתוך Y . לכן, מאי פריקות Y , מתקיים עבור i כלשהו

$$Y = Y \cap X_i$$

$$Y \subseteq X_i$$

לכן $X_1, \dots, X_n$ הן אי פריקות מקסימליות. לכן כל תת קבוצה X_i היא מקסימלית, וכן $X_i \neq X_j$, לכל $i \neq j$. הקבוצות הללו הן בדיוק כל תתי הקבוצות האי פריקות המקסימליות של X . ■

הגדרה 1.3 תתי הקבוצות האי פריקות המקסימליות בתוך $X \subseteq F^n$ נקראות המרכיבים האי פריקים של X .

ראינו כבר כי $P_i = I(X_i)$ הוא אידאל ראשוני. כעת,

$$I(X) = I\left(\bigcup_{i=1}^n X_i\right) = I\left(\bigcup_{i=1}^n V(P_i)\right) = I(V(P_1 \cap \dots \cap P_n)) = \sqrt{P_1 \cap \dots \cap P_n} =$$

$$= \sqrt{P_1} \cap \dots \cap \sqrt{P_n} = P_1 \cap \dots \cap P_n$$

זהו הפירוק הפרימרי של $I(X)$.

דוגמא יהי $f(x) \in R = F[x_1, \dots, x_n]$ לא קבוע. נפרק:

$$f(x) = p_1(x)^{k_1} \dots p_l(x)^{k_l}$$

כאשר $p_i(x)$ אי פריקים ולא חברים (כלומר אין שניים שנבדלים בכפל בקבוע). אזי,

$$V((f(x))) = \{a \in F^n \mid f(a) = 0\} = V((p_1(x))) \cup \dots \cup V((p_l(x)))$$

האידאלים $(p_i(x))$ הם ראשוניים, כי $p_i(x)$ פולינומים אי פריקים. לכן קיבלנו את הפירוק למרכיבים אי פריקים של $V((f(x)))$.

1.1 פונקציות רגולריות

הגדרה 1.4 תהי $\emptyset \neq X \subseteq F^n$ קבוצה אלגברית. פונקציה $\varphi : X \rightarrow F$ תקרא רגולרית אם φ מתקבלת כצמצום של פולינום $f(x) \in R = F[x_1, \dots, x_n]$.

$f(x) \in I(X)$ הוא נקבע מודולו $I(X)$. לכל פולינום $g(x) \in I(X)$, מתקיים

$$\varphi(v) = f(v) + g(v)$$

לכל $v \in X$. לכן נראה את φ כאיבר של $F[X] = F[x_1, \dots, x_n]/I(X)$. זוהי כמובן אלגברה.

הגדרה 1.5 האלגברה $F[X]$ נקראת אלגברת הפונקציות הרגולריות על X .

תכונות

1. $F[X]$ היא אלגברה נוצרת סופית מעל F .
2. האיבר הנילפוטנטי היחיד של $F[X]$ הוא 0.

הגדרה 1.6 אלגברה מעל F המקיימת את שתי התכונות הללו נקראת אלגברה אפינית.

טענה 1.7 תהי A אלגברה אפינית מעל F . אזי קיימים n טבעי ותת קבוצה אלגברית $X \subseteq F^n$ כך שמתקיים

$$A \cong F[X]$$

הוכחה: A נוצרת סופית, ולכן יש בה איברים $a_1, \dots, a_n$ שיוצרים אותה, כלומר $A = F[a_1, \dots, a_n]$. לכן A תמונה הומומורפית של אלגברת הפולינומים $R = F[x_1, \dots, x_n]$ לפי

$$x_i \mapsto a_i$$

יהי $I \subseteq R$ הגרעין של ההומומורפיזם הזה. אזי

$$F[x_1, \dots, x_n] / I \cong A$$

כיוון שמתקיים $\mathcal{N}(A) = 0$, זה אומר שמתקיים $\sqrt{I} = I$. לכן נסמן

$$X = V(I)$$

ונקבל

$$I(X) = I(V(I)) = I$$

לכן

$$A \cong R / I(X) = F[X]$$

כנדרש. ■