

אלגברה ב3

© ארזים

2 בינואר 2017

1 הרחבות שלמות

1.1 משפט העליה (Going Up Theorem)

משפט 1.1 נתונים תחומי שלמות $A \subseteq B$. נניח כי B שלם מעל A . אזי A שדה אם ורק אם B שדה.

הוכחה: נניח כי A שדה. יהי $y \in B$, $y \neq 0$. y שלם (אלגברי) מעל השדה A . נתבונן במשוואה המינימלית של y מעל A :

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_1y + a_0 = 0$$

מהמינימליות, $a_0 \neq 0$, ולכן הוא הפיך. עם כן,

$$y(y^{n-1} + a_{n-1}y^{n-2} + \dots + a_1)(-a_0^{-1}) = 1$$

ולכן y הפיך בתוך B . לכן כל איבר שאינו 0 הפיך בתוך B , כלומר B שדה. נניח כי B שדה. יהי $x \in A$, $x \neq 0$. לכן יש לאיבר x הופכי בתוך B . x^{-1} שלם מעל A , ולכן יש משוואה:

$$(x^{-1})^n + a_{n-1}(x^{-1})^{n-1} + \dots + a_1x^{-1} + a_0 = 0$$

נכפול פי x^n ונקבל

$$1 + a_{n-1}x + \dots + a_nx^{n-1} + a_0x^n = 0$$

ולכן

$$1 = x(-a_{n-1} - \dots - a_1x^{n-2} - a_0x^{n-1})$$

■

המוכפל השני הוא מתוך A , ולכן x הפיך גם בתוך A . לכן A שדה.

מסקנה 1.2 נתונים חוגים $A \subseteq B$. יהי $Q \subseteq B$ אידאל ראשוני. נסמן $P = Q \cap A$ (אידאל ראשוני של A). נניח כי B שלם מעל A . אזי Q אידאל מקסימלי אם ורק אם P אידאל מקסימלי.

הוכחה: ראינו כי B/Q שלם מעל A/P , כאשר מזהים את A/P כתת חוג של B/Q על ידי $a + P \mapsto a + Q$. כיוון שנתון כי P, Q אידאלים ראשוניים, $A/P, B/Q$ תחומי שלמות. מהמשפט, B/Q שדה אם ורק אם A/P שדה, כלומר Q אידאל מקסימלי של B אם ורק אם P אידאל מקסימלי של A . ■

הגדרה 1.3 במצב שמתואר במסקנה הקודמת, נאמר כי האידאל Q מונח מעל האידאל P , והאידאל P מונח מתחת לאידאל Q .

משפט 1.4 נתונים חוגים $A \subseteq B$. נניח כי B שלם מעל A . נתונים שני אידאלים ראשוניים $Q, Q' \subseteq B$ כך שמתקיים

$$Q \cap A = Q' \cap A = P$$

אזי $Q = Q'$.

הוכחה: נסמן $S = A \setminus P$. נתבונן בחוגים $A_P = S^{-1}A$, $B_P = S^{-1}B$. A_P הוא חוג מקומי, שהאידאל המקסימלי בו הוא $m = S^{-1}P$. נסמן $n = S^{-1}Q \subseteq S^{-1}Q' = n'$. נרצה להראות כי $n \cap A_P = m$ מתקיים

$$m = S^{-1}P \subseteq S^{-1}Q = n$$

ולכן

$$m \subseteq n \cap A_P$$

$n \cap A_P$ הוא אידאל ראשוני של A_P , ולכן ממקסימליות m נקבל $m = n \cap A_P$. באותו אופן, $m = n' \cap A_P$.

אנו יודעים כי B_P שלם מעל A_P , ולכן מהמקסמה הקודמת, היות והאידאל m מקסימלי, גם האידאלים n, n' מקסימליים. כיוון שמתקיים $n \subseteq n'$ נקבל $n = n'$. לכן

$$S^{-1}Q = S^{-1}Q'$$

אנחנו יודעים כי ההתאמה $J \mapsto S^{-1}J$, מהאידאלים הראשוניים $J \subseteq B$ שזרים לקבוצה S אל האידאלים הראשוניים של B_P , היא חד-חד-ערכית. לכן $Q = Q'$. ■

משפט 1.5 נתונים חוגים $A \subseteq B$ ונניח כי B שלם מעל A . יהי $P \subseteq A$ אידאל ראשוני. אזי קיים אידאל ראשוני $Q \subseteq B$ כך שמתקיים $Q \cap A = P$.

הוכחה: נתבונן בחוגים A_P, B_P כמו קודם. B_P שלם מעל A_P . האידאל המקסימלי היחיד של A_P הוא $S^{-1}P = m$. יהי $n \subseteq B_P$ אידאל מקסימלי. נסמן

$$\begin{aligned}\varphi : B &\rightarrow B_P \\ x &\mapsto \frac{x}{1} \\ f : A &\rightarrow A_P \\ x &\mapsto \frac{x}{1}\end{aligned}$$

$n \cap A_P \subseteq m$ הוא אידאל ראשוני של A_P . מהמסקנה, $n \subseteq B_P$ מקסימלי, ולכן גם $n \cap A_P \subseteq m$. לכן $n \cap A_P = m$. כעת, ידוע כי

$$\begin{aligned}P &= f^{-1}(m) = f^{-1}(n \cap A_P) = \varphi^{-1}(n \cap A_P) \cap A = \\ &= \varphi^{-1}(n) \cap \varphi^{-1}(A_P) \cap A = \varphi^{-1}(n) \cap A\end{aligned}$$

■ נסמן $Q = \varphi^{-1}(n)$. זהו אידאל ראשוני של B , ולראינו כי $P = Q \cap A$.

משפט 1.6 (משפט העלייה) נתונים $A \subseteq B$ חוגים. נניח כי B שלם מעל A . נתונות שתי שרשראות עולות ממש של אידאלים ראשוניים:

$$\begin{aligned}P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \dots \subsetneq P_n \subseteq A \\ Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq \dots \subsetneq Q_m \subseteq B\end{aligned}$$

נניח כי $m < n$, וכן כי לכל $1 \leq i \leq m$ מתקיים

$$Q_i \cap A = P_i$$

אזי ניתן להרחיב את השרשרת של B להיות

$$Q_1 \subsetneq Q_2 \subsetneq \dots \subsetneq Q_n$$

על ידי אידאלים ראשוניים של B שגם $Q_i \cap A = P_i$ עבורם

הוכחה: די להראות הרחבה באיבר אחד. לכן נניח כי $m = 1, n = 2$. יש לנו

$$\begin{aligned}P_1 \subsetneq P_2 \subseteq P \\ Q_1 \subseteq B\end{aligned}$$

אידאלים ראשוניים, $Q_1 \cap A = P_1$. נתבונן בחוגים $\bar{A} = A/Q_1, \bar{B} = B/Q_1$. $\bar{A}$ כתר חוג של $\bar{B}$. כמובן, $\bar{P}_2 = P_2/P_1$ הוא אידאל ראשוני של $\bar{A}$ כאשר מזהים את $\bar{A}$ כתר חוג של $\bar{B}$.

$\bar{A}$. לכן יש אידאל ראשוני של $\bar{B}$ שמונח מעל $\bar{P}_2$. כלומר, יש אידאל ראשוני $Q_1 \subseteq Q_2 \subseteq B$ כך שמתקיים

$$\overline{Q_2 \cap A} = \bar{P}_2$$

כאשר $\overline{Q_2} = Q_2/Q_1$. נקבל

$$Q_2/Q_1 \cap (A + Q_1)/Q_1 = (P_2 + Q_1)/Q_1$$

זה שקול לכך שמתקיים

$$Q_2 \cap (A + Q_1) = P_2 + Q_1$$

נותר להראות כי $Q_2 \cap A = P_2$. ברור כי $P_2 \subseteq Q_2 \cap A$, שכן $P_2 \subseteq P_2 + Q_1$, כלומר $y \in Q_2 \cap (A + Q_1) = P_2 + Q_1$. כעת נניח כי $y \in Q_2 \cap A$. אז בבירור, $y \in Q_2 \cap (A + Q_1) = P_2 + Q_1$. לכן נוכל לכתוב $y = p_2 + q_1$, כאשר $p_2 \in P_2, q_1 \in Q_1$. מכאן נקבל $q_1 \in A \cap Q_1 = P_1 \subseteq P_2$ כיוון שמתקיים $P_1 \subseteq P_2$ נקבל $q_1 \in P_2$ ולכן $y \in P_2$. לכן סיימנו. ■

הגדרה 1.7 מימד קרול (Krull) של חוג A הוא הסופרימום של כל המספרים השלמים החיוביים n עבורם יש שרשרת עולה ממש של אידאלים ראשוניים:

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_n$$

דוגמאות

1. מימד קרול של שדה F הוא 0.
2. מימד קרול של תחום שלמות ראשי הוא 1 (כי כאן כל אידאל ראשוני שאינו 0 הוא מקסימלי).
3. משפט העלייה אומר שאם B חוג שלם מעל A אזי B בעל מימד סופי אם ורק אם $\dim A = \dim B$ ואז $\dim A = \dim B$.

1.2 משפט הירידה

הגדרה 1.8 נתון תחום שלמות A . נאמר כי A סגור בשלמות אם A סגור בשלמות בשדה המנות שלו.

דוגמא ראינו כי $\mathbb{Z}$ סגור בשלמות. אותה הוכחה בדיוק מראה כי כל תחום פריקות יחידה סגור בשלמות. לכן, לכל שדה F , החוג $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ סגור בשלמות.

טענה 1.9 נתון תחום שלמות A . התכונות הבאות שקולות:

1. A סגור בשלמות.

2. A_P סגור בשלמות לכל אידאל ראשוני $P \subseteq A$.

3. A_m סגור בשלמות לכל אידאל מקסימלי $m \subseteq A$.

הוכחה: יהי F שדה המנות של A . נסמן בתור C את הסגור השלם של A בתוך F . ראינו כי לכל קבוצה כפליית S , הסגור השלם של $S^{-1}A$ בתוך $S^{-1}F = F$ הוא $S^{-1}C$.
 $1 \Rightarrow 2$: A סגור בשלמות, ולכן $C = A$. עבור $S = A \setminus P$, P אידאל ראשוני של A , הסגור השלם של A_P בתוך F הוא $S^{-1}C = S^{-1}A = A_P$, ולכן A_P סגור בשלמות.
 $2 \Rightarrow 3$: ברור, כל אידאל מקסימלי הוא בפרט ראשוני.
 $3 \Rightarrow 1$: אנו יודעים כי C_m הוא הסגור השלם של A_m בתוך F (לכל אידאל מקסימלי $m \subseteq A$). לכן $C_m = A_m$. נסמן $\phi : A \hookrightarrow C$ ההכלה $\phi(x) = x$. זהו הומומורפיזם של חוגים, ולכן הומומורפיזם של מודלים מעל A . אזי $\phi_m : A_m \rightarrow C_m$ המוגדר על ידי $\frac{a}{s} \mapsto \frac{\phi(a)}{\phi(s)} = \frac{a}{s}$ הוא גם הומומורפיזם של חוגים ובפרט הומומורפיזם של מודלים מעל A . מהנתון, על לכל m מקסימלי, ומטענה שראינו בעבר, נובע כי ϕ על, ולכן $C = A$, כלומר A סגור בשלמות. ■

הגדרה 1.10 בהינתן חוגים $A \subseteq B$ ואידאל $I \subseteq A$, נאמר כי $b \in B$ שלם מעל I אם קיימת משוואה

$$b^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i b^i = 0$$

כאשר לכל $0 \leq i \leq n-1$ מתקיים $a_i \in I$.

משפט 1.11 יהיו $A \subseteq B$ חוגים, ויהי $A \subseteq I$ אידאל. נסמן בתור C את הסגור השלם של A בתוך B , ונסמן $I_C = C \cdot I$ - האידאל של החוג C הנוצר על ידי I . אזי הסגור השלם של I בתוך B הוא $\sqrt{I_C} \subseteq C$. בפרט, הסגור השלם של I בתוך B סגור ביחס לחיבור וביחס לכפל (ואפילו ביחס לכפל באיברים שלמים מעל A כלשהם).

הוכחה: יהי $b \in B$ שלם מעל I . לכן יש משוואה

$$b^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i = 0$$

לכן

$$b^n = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i \in I \cdot C = I_C$$

ולכן $b \in \sqrt{I_C}$. להיפך, נניח כי $b \in \sqrt{I_C}$, כלומר קיים n טבעי עבורו $b^n \in I_C$. נכתוב

$$b^n = \sum_{i=1}^r a_i b_i$$

כאשר $a_i \in I, b_i \in C$ נסמן $M = A[b_1, \dots, b_r]$ מודול נוצר סופית מעל A . אזי

$$b^n M = \sum_{i=1}^r a_i b_i M \subseteq IM$$

אם נגדיר $\phi : M \rightarrow M$ על ידי $\phi(u) = b^n u$, נקבל הומומורפיזם של מודולים מעל A ,
וכן $\phi(M) \subseteq IM$ - והוכחנו במקרה כזה כי מקיים משוואה מהצורה

$$\phi^N + \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \phi^i = 0$$

עבור $\alpha_i \in I$ נציב $1 \in M$:

$$b^{nN} + \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i b^{ni} = 0$$

■

ולכן b שלם מעל I .

משפט 1.12 נתונים שני תחומי שלמות $A \subseteq B$. יהי F שדה המנות של A . נניח כי A סגור בשלמות, ויהי $I \subseteq A$ אידאל. יהי $b \in B$ שלם מעל I . אזי b אלגברי מעל F והפולינום המינימלי של b מעל F הוא בעל מקדמים מתוך $\sqrt{I}$ (פרט לעליון).

הוכחה: כמובן, b אלגברי מעל F . ידוע כי החוג $F[b]$ הוא שדה. יהי $g(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$ הפולינום המינימלי של b מעל F . יהי K שדה הפיצול של הפולינום $g(t)$ מעל F . נסמן $b_1 = b, b_2, \dots, b_n \in K$ את כל שורשי $g(t)$. נתבונן בשדות החלקיים $F[b_i] \subseteq K$, שידוע שכולם איזומורפיים מעל F :

$$\begin{aligned} \sigma_i : F[b] &\rightarrow F[b_i] \\ \sigma_i(b) &= b_i \end{aligned}$$

מכאן נקבל כי כל b_i שלם מעל I , וכולם מקיימים את המשוואה מעל I שקיים b : אם

$$f(t) = t^m + \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j t^j$$

באשר $\alpha_j \in I, f(b) = 0$ אזי

$$0 = \sigma_i(f(b)) = f(b_i)$$

מתקיים $g(b_i) = 0$ ולכן $b_1, \dots, b_n$ שלמים (אלגבריים) מעל F .

$$g(t) = \prod_{i=1}^n (t - b_i)$$

ניתן להביע את מקדמי $g(t)$ באמצעות פולינומים עם מקדמים שלמים של השורשים $b_1, \dots, b_n$ (הפולינומים הסימטריים האלמנטריים):

$$\begin{aligned} b_1 + \dots + b_n &= -a_{n-1} \\ (-1)^n b_1 \dots b_n &= a_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$a_i \in F$ שלמים מעל A (כי הם שלמים מעל I) ולכן שייכים לסגור השלם של A בתוך F - אבל A סגור בשלמות, ולכן $a_i \in A$. לכן נסיק כי $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ הם שלמים מעל I . מהמשפט הקודם, היות והחוג A שלם, מתקיים $C = A$, כלומר $I_C = I$, ונקבל כי $a_0, \dots, a_{n-1} \in \sqrt{I_C} = \sqrt{I}$. ■