

אלגברה ב3

© ארזים

29 בדצמבר 2016

1 הסגור השלם

משפט 1.1 נתונים חוגים $A \subseteq B$. התנאים הבאים שקולים עבור $b \in B$:

1. b שלם מעל A .
2. החוג $A[b]$ נוצר סופית כמודול מעל A .
3. קיים חוג $C \subseteq B$ אשר נוצר סופית כמודול מעל A ומכיל את b .
4. קיים מודול נאמן M מעל $A[b]$ שנוצר סופית מעל A .

הוכחה: $1 \Rightarrow 2$: ראינו בשיעור שעבר.

$2 \Rightarrow 3$: ברור, כי ניקח $C = A[b]$.

$3 \Rightarrow 4$: ברור, כי ניקח $M = C$, שכן $b \in C$, וכן אם $\alpha \in A[b]$ עבורו $\alpha \cdot C = 0$, אז כיוון שמתקיים $1 \in C$, $\alpha = \alpha \cdot 1 = 0$. לכן זהו מודול נאמן, ונתון שהוא נוצר סופית מעל A .

$4 \Rightarrow 1$: נתבונן בהעתקה הבאה:

$$\phi: M \rightarrow M$$

$$\phi(u) = bu$$

כמובן שזהו הומומורפיזם של מודולים מעל A .

$$\phi(M) \subseteq M = A \cdot M$$

לפי משפט שראינו בתחילת הפרק על מודולים, ϕ מקיים משוואה מהצורה

$$\phi^n + a_{n-1}\phi^{n-1} + \dots + a_1\phi + a_0 \cdot \text{Id} = 0$$

עבור $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$. מכאן,

$$(b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0)M = 0$$

M מודול נאמן, ולכן נובע כי

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_1b + a_0 = 0$$

■

ולכן b שלם מעל A .

מסקנה 1.2 נניח כי $A \subseteq B$ חוגים, ונניח כי $b_1, \dots, b_n \in B$ שלמים מעל A . אזי החוג $A[b_1, \dots, b_n]$ נוצר סופית כמודול מעל A .

הוכחה: באינדוקציה על n . כאשר $n = 1$, הטענה נובעת מהמשפט. נניח כי הוכחנו כי $A' = A[b_1, \dots, b_{n-1}]$ נוצר סופית כמודול מעל A . ברור כי b_n שלם מעל A' , ולכן $A'[b_n]$ נוצר סופית כמודול מעל A' , ולכן $A'[b_n]$ נוצר סופית גם מעל A .
 ■ כי A' נוצר סופית מעל A .

מסקנה 1.3 יהיו $A \subseteq B$ חוגים. קבוצת האיברים של B השלמים מעל A היא תת חוג של B .

הוכחה: נניח כי $x, y \in B$ שלמים מעל A . אזי החוג $C = A[x, y] \subseteq B$ נוצר סופית כמודול מעל A . $xy, x + y, x - y \in C$, ולכן מהתנאי השלישי במשפט, $xy, x + y, x - y$ כולם שלמים מעל A .
 ■

הגדרה 1.4 בהינתן $A \subseteq B$, קבוצת כל איברי B ששלמים מעל A נקראת הסגור השלם של A בתוך B .

אם הסגור השלם של A בתוך B הוא A , נאמר כי A סגור בשלמות בתוך B .
 אם הסגור השלם של A בתוך B הוא B , נאמר כי B שלם מעל A .

דוגמא $\mathbb{Z}$ סגור בשלמות בתוך $\mathbb{Q}$.

נניח כי $\frac{m}{n}$ (עבור m, n שלמים זרים) שלם מעל $\mathbb{Z}$. אזי

$$\left(\frac{m}{n}\right)^k + a_{k-1}\left(\frac{m}{n}\right)^{k-1} + \dots + a_1\left(\frac{m}{n}\right) + a_0 = 0$$

$$m^k + a_{k-1}nm^{k-1} + \dots + a_1mn^{k-1} + a_0n^k = 0$$

לכן נקבל

$$n \mid m^k$$

אבל הנחנו כי הם זרים ולכן $\frac{m}{n} = \pm m \in \mathbb{Z}$.

דוגמא אם ניקח את $\mathbb{Z}$ ונוסיף איברים שלמים מעליו נקבל חוג ששלם מעל $\mathbb{Z}$, למשל $\mathbb{Z}[\sqrt{2}, \sqrt{3}, i]$

טענה 1.5 נתונים חוגים $A \subseteq B \subseteq C$ נניח כי C שלם מעל B וכי B שלם מעל A אזי C שלם מעל A .

הוכחה: יהי $c \in C$. נניח כי

$$c^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i c^i = 0$$

כאשר $b_i \in B$. נתבונן בחוג

$$B' = A[b_0, \dots, b_{n-1}]$$

B' נוצר סופית כמודול מעל A שכן $b_0, \dots, b_{n-1}$ שלמים מעל A . כמו כן, c שלם מעל B' . לכן החוג $B'[c]$ נוצר סופית כמודול מעל B' , ולכן $B'[c]$ נותר סופית כמודול מעל A , וכמובן מכיל את c ולכן c שלם מעל A . ■

מסקנה 1.6 הסגור השלם של A בתוך B הוא סגור בשלמות בתוך B .

טענה 1.7 נניח כי $A \subseteq B$ חוגים, כאשר B שלם מעל A .

1. יהי $J \subseteq B$ אידיאל. נסמן $I = J \cap A$ (זה אידיאל של A). נזהה את A/I כתת חוג של B/J . אזי B/J שלם מעל A/I .

2. תהי $S \subseteq A$ קבוצה כפלית. נראה את $S^{-1}A$ כתת חוג של $S^{-1}B$. אזי $S^{-1}B$ שלם מעל $S^{-1}A$.

הוכחה:

1. ההומומורפיזם

$$\begin{aligned} A/I &\rightarrow B/J \\ a + I &\rightarrow a + J \end{aligned}$$

הוא חד־חד־ערכי, וזה הזיהוי שנרצה לעשות.
יהי $b \in B$. נניח כי

$$b^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i b^i = 0$$

עבור $a_i \in A$. מכאן נקבל כי

$$(b + J)^n + \sum_{i=0}^{n-1} (a_i + J) (b + J)^i$$

לכן $b + J$ שלם מעל A/J , כלומר B/J שלם מעל A/J .

2. יהי $s \in S$ (נשמור את הסימון של המשוואה המתוקנת אותה b מקיים מהסעיף הקודם).

$$\frac{b^n}{s^n} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{s} \cdot \frac{b^i}{s^i} = \frac{0}{s^n} = \frac{0}{1}$$

ולכן $\frac{b}{s}$ שלם מעל $S^{-1}A$, כלומר $S^{-1}B$ שלם מעל $S^{-1}A$.

■

טענה 1.8 נסמן בתור C את הסגור השלם של A בתוך B . תהי $S \subseteq A$ כפלית. אזי $S^{-1}C$ הוא הסגור השלם של $S^{-1}A$ בתוך $S^{-1}B$. בפרט, אם A סגור בשלמות בתוך B , אז גם $S^{-1}A$ סגור בשלמות בתוך $S^{-1}B$.

הוכחה: ראינו כי $S^{-1}C$ שלם מעל $S^{-1}A$. כעת, נניח כי $\frac{b}{s} \in S^{-1}B$ שלם מעל $S^{-1}A$:

$$\left(\frac{b}{s}\right)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{s_i} \cdot \left(\frac{b}{s}\right)^i = \frac{0}{1}$$

נסמן

$$z = s_0 s_1 \cdots s_n \in S$$

נכפיל פי $(zs)^n$. נקבל

$$\frac{(zb)^n}{1} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i z^{n-i} s^{n-i}}{s_i} \frac{(zb)^i}{1}$$

נוכל לצמצם את כל s_i מתוך החזקות של z במונים, ולקבל

$$\frac{(zb)^n}{1} + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1} \frac{(zb)^i}{1} = 0$$

לכן קיים $t \in S$ עבורו

$$t \left((zb)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (zb)^i \right) = 0$$

נכפיל פי t^{n-1} :

$$(ztb)^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t (ztb)^i$$

לכן ztb שלם מעל A , כלומר $ztb \in C$. כמוכן $zt \in S$. לכן $\frac{b}{1} \in S^{-1}C$, ולכן גם $\frac{b}{s}$. ■