

אלגברה ב3

© ארזים

22 בדצמבר 2016

1 חוגי ארטין

ראינו כבר את הטענה הבאה:

טענה 1.1 יהי R חוג ארטין. אזי כל אידאל רשוני של R הוא מקסימלי.

מסקנה 1.2 בחוג ארטין R מתקיים $\mathcal{N}(R) = \mathcal{J}(R)$.

טענה 1.3 בחוג ארטין R יש מספר סופי של אידאלים מקסימליים (אומרים גם סמי מקומי).

הוכחה: נתבונן בקבוצת החיתוכים הסופיים של אידאלים מקסימליים. זו קבוצת אידאלים של R , ולכן יש איבר מינימאלי. יהי $m_1 \cap \dots \cap m_n$ האיבר המינימלי הזה. לכן לכל m אידאל מקסימלי של R מתקיים

$$m_1 \cap \dots \cap m_n \cap m = m_1 \cap \dots \cap m_n$$

לכן

$$m_1 \cap \dots \cap m_n \subseteq m$$

לכן קיים $1 \leq i \leq n$ כך שמתקיים $m_i \subseteq m$, אבל m_i מקסימלי, ולכן $m = m_i$. לכן $\{m_1, \dots, m_n\}$ היא קבוצת כל האידאלים המקסימליים של R . ■

טענה 1.4 יהי R חוג ארטין. אזי $\mathcal{N}(R)$ הוא אידאל נילפוטנטי, כלומר קיים n עבורו $\mathcal{N}(R)^n = 0$.

הוכחה: נתבונן בסדרה היורדת הבאה:

$$\mathcal{N}(R) \supseteq \mathcal{N}(R)^2 \supseteq \dots$$

הסדרה מתייצבת, נניח באינדקס n . נסמן $I = \mathcal{N}(R)^n$, ונרצה להראות $I = 0$. אם לא, נתבונן בקבוצה Σ של האידאלים J עבורם $I \cdot J \neq 0$. זו קבוצה לא ריקה, שכן $R \in \Sigma$.

לכן יש איבר מינימלי של Σ . נסמן אותו T . אזי $TI \neq 0$. אזי יש $x \in T$ $0 \neq x$ עבורו $RxI = xI \neq 0$. אבל $Rx \subseteq T$, ולכן $T = Rx$. כעת, $xI \subseteq Rx$, כמו כן

$$xI \cdot I = xI \neq 0$$

לכן $xI = Rx$, ממינימליות. לכן קיים $y \in I$ עבורו $xy = x$. לכן $x(1 - y) = 0$

$$y \in I = \mathcal{N}(R)^n \subseteq \mathcal{N}(R) = \mathcal{J}(R)$$

לכן $1 - y \in R^\times$, ולכן $x = 0$, בסתירה. ■

טענה 1.5 יהי R חוג כך שאפשר להציג את 0 כמכפלת אידאלים מקסימליים (לאו דווקא שונים). אזי R חוג נתר אם ורק אם R חוג ארטין.

הוכחה: נתבונן בשרשרת

$$R \supseteq m_1 \supseteq m_1 m_2 \supseteq \dots \supseteq m_1 \dots m_{n-1} \supseteq m_1 \dots m_n = 0$$

כל מנה עוקבת

$$V_i = (m_1 \dots m_{i-1}) / (m_1 \dots m_{i-1} m_i)$$

היא מודול מעל $\mathbb{F}_i = R/m_i$ שהוא שדה. כמו כן, על ידי צמצום סקלרים, V_i הוא מודול מעל R המתאפס על ידי m_i . ברור כי V_i מודול נתר מעל $\mathbb{F}_i$ אם ורק אם הוא מודול ארטין מעל $\mathbb{F}_i$, אם ורק אם הוא מרחב ווקטורי סוף מימדי. נניח כי R חוג נתר (ארטין). $m_1 \dots m_{i-1} \subseteq R$ אידאל, ולכן מודול נתר (ארטין) מעל R . לכן V_i מודול נתר (ארטין) מעל R (שמתאפס מעל m_i). לכן V_i מודול נתר (ארטין) מעל $\mathbb{F}_i$, ולכן V_i הוא מודול ארטין (נתר) מעל $\mathbb{F}_i$. כעת, V_n וגם $V_{n-1} = (m_1 \dots m_{n-1}) / V_n$ מודולי ארטין (נתר) מעל R , ולכן גם $m_1 \dots m_{n-1}$ מודול ארטין (נתר). באופן דומה נוכל להוריד עוד ועוד m_i ולבסוף לקבל כי m_1 מודול ארטין (נתר). כיוון שמתקיים $\mathbb{F}_1 = R/m_1$ שדה, אזי הוא מודול ארטין (נתר) מעל R . לכן R הוא ארטין (נתר) כמודול מעל R , כלומר חוג ארטין (נתר), שכן

$$0 \rightarrow m_1 \rightarrow R \rightarrow \mathbb{F}_1 \rightarrow 0$$

סדרה מדויקת. ■

משפט 1.6 יהי R חוג ארטין. אזי R חוג נתר.

הוכחה: ראינו כי כל אידאל ראשוני בחוג R הוא מקסימלי, ויש מספר סופי מהם. נכתוב

$$\{m_1, \dots, m_n\} = \max \text{Spec}(R)$$

האידאלים המקסימליים. אזי

$$\mathcal{N}(R) = \mathcal{J}(R) = \bigcap_{i=1}^n m_i$$

כמו כן, $\mathcal{N}(R)^k = 0$ עבור k כלשהו. כעת,

$$\prod_{i=1}^n m_i^k = \left(\prod_{i=1}^n m_i \right)^k \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^n m_i \right)^k = \mathcal{J}(R)^k = \mathcal{N}(R)^k = 0$$

ולכן מהטענה האחרונה R הוא חוג נתר. ■

2 חוגי נתר

טענה 2.1 יהי M מודול מעל חוג R . M הוא מודול נתר אם ורק אם כל תת מודול שלו נוצר סופית.

הוכחה: נניח כי M הוא מודול נתר מעל R . יהי $N \subseteq M$ תת מודול. תהי Σ קבוצת כל תת המודולים של N שנוצרים סופית. Σ לא ריקה, כי $0 \in \Sigma$, ולכן יש בה איבר מקסימלי שנסמנו N_0 . נוכיח $N = N_0$. אחרת, קיים $n \in N \setminus N_0$, ואז

$$N_0 \subsetneq N_0 + Rn$$

אבל אגף ימין נוצר סופית, בסתירה למקסימליות של N_0 . לכן N נוצר סופית. יהי M כך שכל תת מודול שלו נוצר סופית. תהי $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ שרשרת עולה של תת מודולים של M . נסמן

$$M > N = \bigcup_i M_i$$

תהי L קבוצה סופית היוצרת את N . לכן קיים j עבורו $L \subseteq M_j$. אזי

$$M_j = M_{j+1} = M_{j+2} = \dots$$

ולכן הסדרה מתייצבת, כלומר M מודול נתר. ■

מסקנה 2.2 יהי R חוג ראשי. אזי R חוג נתר.

טענה 2.3 בחוג נתר, כל אידאל מכיל חזקה של הרדיקל שלו.

הוכחה:

$$R \triangleright \sqrt{I} = Rx_1 + \dots + Rx_n$$

כעת, $x_i \in \sqrt{I}$, ולכן יש r_i עבורו $x_i^{r_i} \in I$. יהי $r_1 + \dots + r_n \leq m$. האידאל $(\sqrt{I})^m$ נוצר על ידי $x_1^{l_1} \dots x_n^{l_n}$, כאשר

$$l_1 + \dots + l_n = m$$

■ אזי $1 \leq i \leq n$ כך שמתקיים $l_i \geq r_i$, ולכן יש $x_i^{l_i} \in I$, ולכן $(\sqrt{I})^m \subseteq I$.

מסקנה 2.4 בחוג נתר R , הרדיקל הנילי הוא אידאל נילפוטנטי.

הוכחה: יהי m כך שמתקיים

$$(\sqrt{0})^m \subseteq 0$$

■ לכן $(\sqrt{0})^m = \mathcal{N}(R)^m = 0$.