

אגלברה ב3

© ארזים

19 בדצמבר 2016

1 פירוק פרימרי

1.1 לוקליזציות

אנחנו עובדים בחוג R עם קבוצה כפלית $S \subseteq R$. ניקח $Q \subseteq R$ אידאל פרימרי, $P = \sqrt{Q}$ אידאל ראשוני.

באופן כללי, מתקיים $Q \cap S = \emptyset$ אם ורק אם $P \cap S = \emptyset$. אם $P \cap S \neq \emptyset$ אזי $S^{-1}Q = S^{-1}R$. נניח כי $P \cap S = \emptyset$, ונראה כי $S^{-1}Q \subseteq S^{-1}R$ הוא אידאל פרימרי ביחס לאידאל הראשוני $S^{-1}P$.

$$\sqrt{S^{-1}Q} = S^{-1}\sqrt{Q} = S^{-1}P$$

כעת, נניח כי $\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} \in S^{-1}Q$, ונכתוב $\frac{xy}{st} = \frac{q}{z}$. לכן יש $u \in S$ עבורו

$$u(xyz - qst) = 0$$

$$(xy)(zu) = qstu \in Q$$

כמובן $zu \in S$, וכיוון שמתקיים $Q \cap S = \emptyset$, בהכרח $zu \notin Q$. בעצם $zu \notin \sqrt{Q} = P$, שכן $P \cap S = \emptyset$. כיוון שהאידאל Q פרימרי, $xy \in Q$. כעת, נניח כי $\frac{x}{s} \notin S^{-1}Q$, כלומר $\frac{x}{s} \notin S^{-1}P = \sqrt{S^{-1}Q}$. נסיק כי $y \in \sqrt{Q} = P$, כלומר $\frac{y}{t} \in S^{-1}P$. כעת נסמן בתור f את ההומומורפיזם $r \mapsto \frac{r}{1}$. אזי מתקיים

$$f^{-1}(S^{-1}Q) = \bigcup_{s \in S} (Q : s)$$

כעת, כיוון שמתקיים $\sqrt{Q} = P$, לכל $s \in S$, אנו יודעים כי $(Q : s) = Q$, כלומר

$$f^{-1}(S^{-1}Q) = Q$$

טענה 1.1 יש התאמה חד-חד-ערכית ועל בין האידאלים הפרימרי של $S^{-1}R$ לבין האידאלים הפרימריים של R שזרים לקבוצה S . ההתאמה היא:

$$Q \mapsto S^{-1}Q$$

$$f^{-1}(J) \mapsto J$$

הוכחה: את הכיוון $\mapsto$ ראינו. בכיוון ההפוך, אם $J \subseteq S^{-1}R$ אידאל פרימרי אזי $f^{-1}(J)$ אידאל פרימרי של R . ■

טענה 1.2 יהי $I \subseteq R$ אידאל פריק. נניח כי

$$I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$$

פירוק פרימרי מינימלי. נסמן $P_i = \sqrt{Q_i}$. תהי $S \subseteq R$ קבוצה כפלית, ונניח כי לכל $1 \leq i \leq m$ מתקיים $P_i \cap S = \emptyset$, ולכל $m+1 \leq i \leq n$ מתקיים $P_i \cap S \neq \emptyset$. אזי

$$S^{-1}I = \bigcap_{i=1}^m S^{-1}Q_i$$

וכן

$$f^{-1}(S^{-1}I) = \bigcap_{i=1}^m Q_i$$

ואלה הם פירוקים פרימריים מינימליים.

הוכחה:

$$S^{-1}I = S^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^n Q_i\right) = \bigcap_{i=1}^n S^{-1}Q_i = \bigcap_{i=1}^m S^{-1}Q_i$$

נראה כי פירוק זה הוא מינימלי. הרדיקלים הם $\sqrt{S^{-1}Q_i} = S^{-1}\sqrt{Q_i} = S^{-1}P_i$. כיוון שההתאמה $P \rightarrow S^{-1}P$ היא התאמה חד-חד-ערכית ועל בין האידאלים הראשוניים של R שזרים לקבוצה S לבין האידאלים הראשוניים של חוג השברים, נקבל כי $S^{-1}P_i \neq S^{-1}P_j$ לכל $1 \leq i \neq j \leq m$. אם

$$\bigcap_{i \neq j=1}^m S^{-1}Q_j \supseteq S^{-1}Q_i$$

אזי

$$Q_i = f^{-1}(S^{-1}Q_i) \supseteq \bigcap_{i \neq j=1}^m f^{-1}(S^{-1}Q_j) = \bigcap_{i \neq j=1}^m Q_j$$

בסתירה למינימליות הפירוק של I . כמובן

$$f^{-1}(S^{-1}I) = \bigcap_{i=1}^m f^{-1}(S^{-1}Q_i) = \bigcap_{i=1}^m Q_i$$

וזהו כמובן פירוק מינימלי. ■

1.2 משפט היחידות השני

הגדרה 1.3 יהי I אידאל פריק, ותהי Σ קבוצת אידאלים ראשוניים השייכים לאידאל I . נאמר כי Σ קבוצה מבודדת אם לכל $P' \in \Sigma$ אידאל ראשוני השייך לאידאל I עבורו קיים $P \in \Sigma$ המכיל את P' , מתקיים $P' \in \Sigma$.

דוגמאות

1. Σ שהיא קבוצת כל האידאלים הראשוניים השייכים לאידאל I .
 2. Σ שהיא קבוצת כל האידאלים הראשוניים המינימליים השייכים לאידאל I (כל קבוצה חלקית של Σ גם כן מבודדת).
 3. Σ שהיא סינגלטון $\{P\}$ עבור אידאל ראשוני מינימלי P השייך לאידאל I .
- משפט 1.4** (משפט היחידות השני של הפירוק הפרימרי) יהי $I \subseteq R$ אידאל פריק, ויהי

$$I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$$

פירוק פרימרי מינימלי. נסמן $P_i = \sqrt{Q_i}$. תהי Σ קבוצה מבודדת של אידאלים ראשוניים השייכים לאידאל I , ונסמן

$$\Sigma = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_k}\}$$

אזי החיתוך

$$\bigcap_{j=1}^k Q_{i_j}$$

נקבע באופן יחיד על ידי בחירת Σ .

הוכחה: נגדיר

$$S = R \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k P_{i_j} \right) = \bigcap_{j=1}^k (R \setminus P_{i_j})$$

זאת קבוצה כפלית, כחיתוך של הקבוצות הכפליות $R \setminus P_{i_j}$. כמובן, לכל $1 \leq j \leq k$ מתקיים $P_{i_j} \cap S = \emptyset$, ולכל אינדקס אחר r מתקיים $P_r \cap S \neq \emptyset$, שכן

$$P_r \not\subseteq \bigcup_{j=1}^k P_{i_j}$$

אחרת, אז יש $1 \leq j \leq k$ מסויים עבורו $P_r \subseteq P_{i_j}$. לכן, היות ולקחנו את Σ כקבוצה מבודדת, זה אומר $P_r \in \Sigma$, בסתירה.

כעת, מהטענה הקודמת

$$f^{-1}(S^{-1}I) = \bigcap_{i=1}^k Q_{i_j}$$

כעת, אגף שמאל לא תלוי בפירוק הפרימרי שבחרנו, אלא רק באידאל I , ולכן גם אגף ימין, כמו שרצינו. ■

כמקרה פרטי נקבל את המסקנה הבאה:

מסקנה 1.5 בסימונים שלעיל, האידאלים הפרימריים Q_i כך שהרדיקלים שלהם P_i אידאל ראשוני מינימלי השייך לאידאל I נקבעים באופן יחיד על ידי I .

2 תנאי שרשרת

2.1 הגדרות ומושגים בסיסיים

למה 2.1 תהי $(\Sigma, \preceq)$ קבוצה בעלת סדר חלקי. התנאים הבאים שקולים:

1. כל סדרה אינסופית ועולה מתוך Σ מתייצבת, כלומר אם $x_1 \preceq x_2 \preceq \dots \preceq x_n \preceq \dots$ אזי יש אינדקס r כך שלכל i מתקיים $x_r = x_{r+i}$.

2. בכל תת קבוצה של Σ יש איבר מקסימלי.

הוכחה: $1 \Rightarrow 2$: נניח בשלילה כי יש תת קבוצה $A \subseteq \Sigma$ שאין בה איבר מקסימלי. נבחר $x_1 \in A$. איבר זה לא מקסימלי, ולכן $x_1 \not\preceq x_2 \in A$, וכך נוכל להמשיך, משום שאין איבר מקסימלי. נקבל סדרה עולה

$$x_1 \not\preceq x_2 \not\preceq x_3 \not\preceq \dots \not\preceq x_n \not\preceq \dots$$

מתנאי 1, הסדרה מתייצבת, וזאת סתירה.

$2 \Rightarrow 1$: תהי סדרה עולה מתוך Σ . יש איזשהו x_n שהוא מקסימלי, ואז בבירור $x_{n+i} = x_n$ לכל i . ■

הגדרה 2.2 יהי M מודול מעל R . תהי קבוצת כל המודולים החלקיים למודול M , מסודרת ביחס להכלה.

אם Σ מקיימת את התכונות שבלמה, נאמר כי M מודול נתר (Noether) מעל R . אם החוג R הוא מודול נתר מעל R , נאמר כי R הוא חוג נתר.

כאשר מסדרים את Σ ביחס להכלה הפוכה ומתקיימים תנאי הלמה, נאמר כי M הוא מודול ארטין (Artin) מעל R . אם R הוא מודול ארטין מעל R , נאמר כי R הוא חוג ארטין.

דוגמא $\mathbb{Z}$ הוא חוג נתר. אם ניקח שרשרת עולה של אידאלים

$$\mathbb{Z}m_1 \subseteq \mathbb{Z}m_2 \subseteq \mathbb{Z}m_3 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{Z}m_n \subseteq \dots$$

אזי בהכרח מתקיים $m_1 \mid m_2 \mid m_3 \mid \dots \mid m_n$. למספר m_1 יש מספר סופי של

מחלקים, ולכן בהכרח שרשרת האידאלים תתייצב.
 $\mathbb{Z}$ אינו חוג ארטין - יהי $a \geq 2$ מספר טבעי, אזי

$$\mathbb{Z} \supsetneq \mathbb{Z}a \supsetneq \mathbb{Z}a^2 \supsetneq \dots$$

אותה דוגמא עובדת עבור $\mathbb{F}[x]$ מעל שדה $\mathbb{F}$.

טענה 2.3 תהי

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \rightarrow 0$$

סדרה מדויקת של מודולים מעל R . אזי M מודול נתר (ארטין) אם ורק אם M', M'' הם מודולי נתר (ארטין).

הוכחה: נניח כי M מודול נתר (ארטין). תהי $\{M'_i\}_{i=1}^\infty$ שרשרת עולה (יורדת) של תת מודולים של M' . לכן $\{\alpha(M'_i)\}_{i=1}^\infty$ היא שרשרת עולה (יורדת) של תת-מודולים של M , ולכן מתייצבת, נניח באינדקס n . כיוון שנתון כי α חד-חד-ערכית, גם

$$M'_{i+n} = M'_n$$

לכל i . לכן M' מודול נתר (ארטין).
 אם $\{M''_i\}_{i=1}^\infty$ היא שרשרת עולה (יורדת) של תת מודולים של M'' , אזי גם $\{\beta^{-1}(M''_i)\}_{i=1}^\infty$ היא שרשרת עולה (יורדת) של תת מודולים של M , ולכן מתייצבת, נניח באינדקס n . נתון כי β על, ולכן שרשרת כזאת של תת-מודולים של M , ולכן מתייצבת, נניח באינדקס n . נתון כי β על, ולכן

$$M''_{i+n} = \beta(\beta^{-1}(M''_{i+n})) = \beta(\beta^{-1}M''_i) = M''_i$$

לכל i . לכן M'' מודול נתר (ארטין).
 בכיוון ההפוך, נניח כי M', M'' מודולי נתר (ארטין). תהי $\{M_i\}_{i=1}^\infty$ שרשרת עולה (יורדת) של תתי מודולים מעל M . נתבונן בשרשראות $\{\alpha^{-1}(M_i)\}_{i=1}^\infty, \{\beta(M_i)\}_{i=1}^\infty$ שגם הן עולות (יורדות), ולכן מתייצבות. נניח כי לכל $i \geq r$ מתקיים

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(M_i) &= \alpha^{-1}(M_r) \\ \beta(M_i) &= \beta(M_r)\end{aligned}$$

נראה כי לכל $i \geq r$ מתקיים $M_i = M_r$.
 אנו יודעים כי $M_i \supseteq M_r$ ($M_i \subseteq M_r$). לכן יהי $v \in M_i$ ($v \in M_r$). יש $v' \in M_r$ ($v' \in M_i$) כך שמתקיים $\beta(v) = \beta(v')$. לכן $\beta(v) = \beta(v')$. לכן $\beta(v) = \beta(v')$. לכן $\beta(v) = \beta(v')$. לכן $\beta(v) = \beta(v')$.
 כן שמתקיים $v - v' = \alpha(u)$.
 בסך הכל נקבל $v - v' \in M_i$ ($v - v' \in M_r$), ולכן $u \in \alpha^{-1}(M_i)$ ($u \in \alpha^{-1}(M_r)$).
 כעת, $v \in v = v' + \alpha(u) \in M_r + \alpha(\alpha^{-1}(M_i)) = M_r + \alpha(\alpha^{-1}(M_r)) = M_r$.
 ■ $M_i + \alpha(\alpha^{-1}(M_i)) = M_i$

מסקנה 2.4 סכום ישר סופי של מודולי נתר (ארטין) הוא מודול נתר (ארטין).

הוכחה: מספיק להוכיח עבור 2 מדוולים. נניח כי $M = M_1 \oplus M_2$ כאשר M_1, M_2 מודולי נתר (ארטין). הסדרה הבאה מדויקת, ולכן נסיים:

$$0 \rightarrow M_1 \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M_2 \rightarrow 0$$

■

טענה 2.5 מודול נוצר סופית M מעל חוג נתר (ארטין) R הוא מודול נתר (ארטין) מעל R .

הוכחה: יש n טבעי עבורו M הוא תמונה הומומורפית של R^n . R^n הוא סכום ישר של R עם עצמו, כלומר הוא מודול נתר (ארטין) מעל R , ולכן גם M כזה. ■

טענה 2.6 יהי R חוג נתר (ארטין) ויהי $I \subseteq R$ אידאל. אזי R/I הוא חוג נתר (ארטין).

הוכחה: R/I הוא מודול נתר (ארטין) מעל R . תת מודול מעל R של R/I הוא מהצורה J/I כאשר $I \subseteq J \subseteq R$ אידאל. לכן יש תנאי שרשרת עולה (יורדת) על האידאלים של חוג המנה R/I , ולכן R/I הוא חוג נתר (ארטין). ■

טענה 2.7 יהיו $A \subseteq R$ חוגים. נניח כי R נוצר סופית כמודול מעל A , וכי A הוא חוג נתר (ארטין). אזי גם R חוג נתר (ארטין).

הוכחה: מטענה קודמת R הוא מודול נתר (ארטין) מעל A . בפרט R הוא מודול נתר (ארטין) מעל R , כלומר R חוג נתר (ארטין). ■

מסקנה 2.8 נניח כי R חוג נתר (ארטין). אזי החוג R^n הוא גם חוג נתר (ארטין), לכל n .

הוכחה: מציבים בטענה $A = R(1, \dots, 1) \subseteq R^n$. ■

טענה 2.9 תהי $S \subseteq R$ קבוצה כפלית. נניח כי R חוג נתר (ארטין). אזי גם $S^{-1}R$ הוא חוג נתר (ארטין).

הוכחה: תהי $\{J_k\}_{k=1}^\infty$ שרשרת עולה (יורדת) של אידאלים של $S^{-1}R$. נסמן $f^{-1}(J_k) = I_k$. אזי $J_k = S^{-1}I_k$. $\{I_k\}_{k=1}^\infty$ היא שרשרת עולה (יורדת) בחוג R , ולכן מתייצבת, נניח באינדקס n , כלומר לכל $k \geq n$ מתקיים:

$$I_k = I_n$$

אזי

$$J_k = S^{-1}I_k = S^{-1}I_n = J_n$$

■

2.2 חוגי ארטין

טענה 2.10 בחוג ארטין, כל אידאל ראשוני הוא מקסימלי.

הוכחה: יהי $P \subseteq R$ אידאל ראשוני. נסמן $B = R/P$. זהו תחום שלמות. נראה שזהו שדה. נניח כי $x \in B$, $x \neq 0$. נתבונן בסדרת האידאלים

$$Bx \supseteq Bx^2 \supseteq Bx^3 \supseteq \dots$$

כיוון שגם B חוג ארטין, סדרה זו מתייצבת. נניח כי

$$Bx^n = Bx^{n+1}$$

כלומר יש $b \in B$ עבורו $x^n = x^{n+1}b$.

$$x^{n+1}b - x^n = 0$$

$$x^n(xb - 1) = 0$$

כעת $x^n \neq 0$, שכן $x \neq 0$ וכן B תחום שלמות. לכן נקבל $xb - 1 = 0$, כלומר $xb = 1$.
לכן B שדה, והאידאל P מקסימלי. ■