

אלגברה ב3

© ארזים

15 בדצמבר 2016

בשיעור שעבר, היינו בעיצומה של ההוכחה הבאה:

משפט 0.1 יהי $\varphi: R_1 \rightarrow R_2$ הומומורפיזם של חוגים, ויהי $P \subseteq R_1$ אידאל ראשוני כך שמתקיים

$$\varphi^{-1}(R_2\varphi(P)) = P$$

אזי קיים אידאל ראשוני $Q \subseteq R_2$ כך שמתקיים

$$P = \varphi^{-1}(Q)$$

הוכחה: נגדיר $S = \varphi(R_1 \setminus P) \subseteq R_2$. זו כמובן קבוצה כפלית. נראה כעת כי

$$S \cap R_2\varphi(P) = \emptyset$$

אחרת, יהי s בחיתוך. אזי $s \in S$, ולכן $s = \varphi(t)$ עבור $t \in R_1 \setminus P$ כלשהו. כמו כן, $s \in R_2\varphi(P)$, כלומר $s = \varphi(t)$ אזי מתקיים

$$t \in \varphi^{-1}(R_2\varphi(P)) = P$$

וזו סתירה, כי $t \in R_1 \setminus P$. נסיק כי מתקיים

$$S^{-1}(R_2\varphi(P)) \subsetneq S^{-1}R_2$$

לכן קיים אידאל מקסימלי $m \subseteq S^{-1}R_2$ אשר מכיל את האידאל $S^{-1}(R_2\varphi(P))$. כיוון שבפרט, m אידאל ראשוני, נוכל לכתוב $m = S^{-1}Q$ עבור אידאל ראשוני $Q \subseteq R_2$ כלשהו שזר לקבוצה S .

נראה כי $Q \supseteq R_2\varphi(P)$. יהי $b \in R_2\varphi(P)$. אזי מתקיים

$$\frac{b}{1} \in S^{-1}(R_2\varphi(P)) \subseteq m = S^{-1}Q$$

כעת, נכתוב

$$\frac{b}{1} = \frac{q}{s}$$

עבור $z \in S$ קיים $q \in Q, s \in S$ לכן קיים $z \in S$ עבורו

$$\begin{aligned} z(sb - q) &= 0 \\ zsb &= qz \in Q \end{aligned}$$

$zs \in S$, כלומר $zs \notin Q$, אבל $bzs \in Q$ ולכן בהכרח $b \in Q$ (כי Q ראשוני). לכן קיבלנו כי

$$\begin{aligned} R_2\varphi(P) &\subseteq Q \\ P = \varphi^{-1}(R_2\varphi(P)) &\subseteq \varphi^{-1}(Q) \end{aligned}$$

נראה שזהו שוויון של ממש. נניח בשלילה שלא, אזי קיים איבר $t \in \varphi^{-1}(Q) \setminus P$. אזי $\varphi(t) \in \varphi(R_1 \setminus P) = S$ וכמובן גם $\varphi(t) \in Q$, בסתירה - $Q \cap S = \emptyset$. לכן קיבלנו את השוויון שרצינו. ■

1 אידאלים פרימרים

1.1 אידאלים פרימרים ופירוק פרימרי

הגדרה 1.1 אידאל $Q \subsetneq R$ ייקרא פרימרי אם התכונה הבאה מתקיימת לכל $x, y \in R$:

$$xy \in Q \Rightarrow x \in Q \vee y \in \sqrt{Q}$$

הגדרה שקולה: $Q \subseteq R$ הוא אידאל פרימרי אם $R/Q \neq 0$, וכל מחלק אפס בחוג R/Q הוא נילפוטנטי.

אם $f: R_1 \rightarrow R_2$ הומומורפיזם של חוגים, $Q \subseteq R_2$ אידאל פרימרי, אזי $f^{-1}(Q) \subseteq R_1$ אידאל פרימרי, שכן אם $xy \in f^{-1}(Q)$, אזי $f(x)f(y) \in Q$. לכן $f(x) \in Q$ ואז $x \in f^{-1}(Q)$ או $f(y)^n = f(y^n) \in Q$ ואז $y^n \in f^{-1}(Q)$ כלומר $y \in \sqrt{f^{-1}(Q)}$.

דוגמה בחוג השלמים, לכל מספר ראשוני p ולכל טבעי n , האידאל $\mathbb{Z}p^n$ הוא אידאל פרימרי. נניח כי $xy \in \mathbb{Z}p^n$, אזי $p^n \mid xy$. אם $p^n \nmid x$, אזי $p \mid y$, כלומר $y^n \in \mathbb{Z}p^n$. לכן $y \in \sqrt{\mathbb{Z}p^n}$.

טענה 1.2 נניח כי $Q \subseteq R$ אידאל פרימרי. אזי $\sqrt{Q}$ הוא אידאל ראשוני. זהו האידאל הראשוני הקטן ביותר אשר מכיל את Q .

הוכחה: נניח כי $xy \in \sqrt{Q}$. אזי יש n טבעי עבורו $x^n y^n \in Q$, כלומר $x^n \in Q$ או $y^n \in \sqrt{Q}$. אם $x^n \in Q$, אזי $x \in \sqrt{Q}$. אם $y^n \in Q$, אזי יש m טבעי עבורו $y^{nm} \in Q$, כלומר $y \in \sqrt{Q}$.
 כמובן, הרדיקל הוא החיתוך של כל האידאלים הראשוניים המכילים את Q , ולכן הוא מוכל בכולם. ■

דוגמא נחזור לדוגמא הקודמת. נניח כי $\mathbb{Z}m$ אידאל פרימרי של $\mathbb{Z}$. נכתוב $m = p_1^{r_1} \dots p_k^{r_k}$ עבור ראשוניים כלשהם, וכן $r_i \geq 1$ חזקות כלשהן. מתקיים

$$\sqrt{\mathbb{Z}m} = \mathbb{Z}_{p_1 \dots p_k}$$

אבל זהו רדיקל של אידאל פרימרי, כלומר ראשוני. לכן $k = 1$, ולכן $m = p^r$ עבור ראשוני וחזקה כלשהם.

דוגמא $\mathbb{F}, R = \mathbb{F}[x, y]$ שדה. נתבונן באידאל $Q = Rx + Ry^2$. זהו אידאל פרימרי:

$$R/Q = \mathbb{F}[y]/\mathbb{F}[y]y^2$$

בדיוק כמו בדוגמה הקודמת, כיוון שהחוג $\mathbb{F}[y]$ הוא ראשי, האידאל $\mathbb{F}[y]y^2$ הוא פרימרי - הוא נוצר על ידי חזקה של פולינום אי פריק. לכן כל מחלק אפס במנה באגף ימין הוא נילפוטנטי, ולכן זה נכון גם עבור R/Q , כלומר Q אכן אידאל פרימרי. נסמן $P = Rx + Ry$. כעת נראה כי $\sqrt{Q} = P$. נניח כי $f(x, y) \in \sqrt{Q}$. אזי קיים n טבעי עבורו

$$f(x, y)^n \in Q$$

כמובן, ניתן לכתוב

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^l a_i(x) y^i$$

כאשר $a_i(x) \in \mathbb{F}[x]$. אז מתקיים

$$f(x, y)^n = a_0(x)^n + y \cdot g(x, y)$$

עבור פולינום כלשהו $g(x, y) \in R$. כמו כן, $f(x, y)^n \in Q = Rx + Ry^2$. נסיק כי בהכרח $a_0(x)^n \in Rx$, כלומר $a_0(x)^n \mid x$. לכן, $a_0(x) \mid x$. בסך הכל מתקיים

$$f(x, y) = a_0(x) + y \sum_{i=1}^l a_i(x) y^{i-1} \in Rx + Ry = P$$

אז הראינו $\sqrt{Q} \subseteq P$. ההכלה השנייה ברורה: $y \in \sqrt{Q}$, שכן $y^2 \in Q$. כמו כן $x \in Q$ יחד נקבל

$$Rx + Ry \subseteq \sqrt{Q}$$

וזה השוויון שרצינו.
כעת, מתקיים

$$P^2 \subseteq Q \subseteq P$$

שכן מתקיים

$$P^2 = Rx^2 + Rxy + Ry^2 \subseteq Rx + Ry^2 = Q$$

כמו כן, כל ההכלות הן ממש:

$$P^2 \subsetneq Q \subsetneq P$$

למשל, $y \in P \setminus Q$, וכן $x \in Q \setminus P^2$. כעת, נראה כי Q אינו חזקה של אידאל ראשוני.
נניח בשלילה כי $Q = P'^n$, כאשר P' אידאל ראשוני. מההכלות, נקבל

$$P'^n \subseteq P$$

והרי P ראשוני, ולכן

$$P' \subseteq P$$

אם $n \geq 2$, אזי

$$P^2 \subsetneq Q = P'^n \subseteq P^n \subseteq P^2$$

בסתירה. לכן בהכרח $n = 1$. ואז $Q = P'$ אידאל ראשוני, וזה לא נכון, כי $y^2 \in Q$,
בעוד $y \notin Q$.

הדוגמא האחרונה מראה שלא כל אידאל פרימרי הוא חזקה של ראשוני. כעת נראה דוגמא
שמראה שגם בכיוון ההפוך, חזקה של אידאל ראשוני אינה בהכרח אידאל פרימרי.

דוגמא ניקח

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{F}[x, y, z] \\ J &= A(xy - z^2) \\ R &= A/J \end{aligned}$$

נסמן כעת

$$\overline{f(x, y, z)} = f(x, y, z) + J \in R$$

נסמן

$$P = R\bar{x} + R\bar{y}$$

ואז מתקיים

$$R/P \cong \mathbb{F}[y]$$

על ידי ההעתקה

$$\overline{f(x, y, z)} + P \rightarrow f(0, y, 0)$$

בדיקת ההעתקה נשארת כתרגיל. לכן P אידאל ראשוני, כי המנה $\mathbb{F}[y]$ היא תחום שלמות. נתבונן באידאל P^2 . מתקיים

$$\bar{x} \cdot \bar{y} \in P^2$$

אבל $\bar{x} \notin P$ וכן $\bar{y} \notin P$, אבל $\sqrt{P^2} = P$ (תרגיל), ולכן P^2 אינו אידאל פרימרי.

דוגמא זו הראתה גם שאם $\sqrt{I}$ הוא אידאל ראשוני, עבור אידאל I כלשהו, אזי לאו דווקא I פרימרי.

טענה 1.3 יהי $I \subseteq R$ אידאל עבורו $\sqrt{I}$ הוא אידאל מקסימלי. אזי I אידאל פרימרי.

הוכחה: נסמן $\sqrt{I} = m$, וזהו אידאל מקסימלי, מהנתון. זהו גם חיתוך כל האידאלים הראשוניים P שמכילים את I . לכן $m \subseteq P$ לכל אידאל ראשוני P המכיל את I . m מקסימלי, ולכן $P = m$ תמיד, כלומר יש אידאל ראשוני יחיד שמכיל את I , וזהו m . מכאן שבחוג המנה R/I יש אידאל ראשוני יחיד - m/I , שהוא גם אידאל מקסימלי. לכן, R/I הוא חוג מקומי, עם אידאל מקסימלי יחיד m/I . אם כן, $m/I = R/I \setminus (R/I)^*$. מכאן, כל מחלק אפס בחוג R/I שייך לאידאל m/I . נתבונן ברדיקל הנילי $\mathcal{N}(R/I)$. זהו חיתוך כל האידאלים הראשוניים בחוג, אבל רק m/I ראשוני, לכן $\mathcal{N}(R/I) = m/I$. לכן כל מחלק אפס במנה R/I שייך לרדיקל הנילי, כלומר הוא נילפוטנטי, ולכן I פרימרי. ■

מסקנה 1.4 כל חזקה של אידאל מקסימלי היא אידאל פרימרי.

הגדרה 1.5 יהי $Q \subseteq R$ אידאל פרימרי. נסמן $\sqrt{Q} = P$. זהו אידאל ראשוני, ואנחנו נאמר כי Q אידאל פרימרי ביחס לאידאל P (ולעיתים, Q אידאל פרימרי (P)).

טענה 1.6 יהיו $\{Q_i\}_{i=1}^n$ אידאלים פרמרים בחוג R ביחס לאידאל הראשוני P . אזי גם $\bigcap Q_i$ הוא אידאל פרימרי ביחס לאידאל P .

הוכחה: טענה פשוטה שנשארת כתרגיל היא שמתקיים תמיד

$$\sqrt{\bigcap_{i=1}^n Q_i} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{Q_i} = \bigcap_{i=1}^n P = P$$

לכן נותר רק להראות שהחיתוך פרימרי. נניח כי

$$xy \in \bigcap_{i=1}^n Q_i$$

וכן נניח כי x אינו איבר בחיתוך. נרצה להראות כי $y \in P$. קיים $1 \leq i \leq n$ עבורו $x \notin Q_i$, אבל $xy \in Q_i$ וכן Q_i פרימרי, ולכן $y \in \sqrt{Q_i} = P$ ולכן סיימנו. ■

למה 1.7 יהי $Q \subseteq R$ אידאל פרימרי ביחס לאידאל P .

1. אם $x \in Q$ אזי $(Q : x) = R$.

2. אם $x \notin Q$ אזי $(Q : x)$ הוא פרימרי ביחס לאידאל P .

3. אם $x \notin P$ אזי $(Q : x) = Q$.

הוכחה: ניזכר בהגדרה:

$$(Q : x) = \{a \in R \mid ax \in Q\}$$

1. אם $x \in Q$, אז לכל $a \in R$ גם $ax \in Q$ ולכן $(Q : x) = R$.

2. נניח כי $x \notin Q$. אם $a \in (Q : x)$, אזי $ax \in Q$, והרי Q פרימרי. לכן $a \in \sqrt{Q} = P$.
לכן $(Q : x) \subseteq P$. כמו כן,

$$Q \subseteq (Q : x) \subseteq P$$

$$P = \sqrt{Q} \subseteq \sqrt{(Q : x)} \subseteq \sqrt{P} = P$$

לכן $\sqrt{(Q : x)} = P$. נותר רק להראות כי $(Q : x)$ פרימרי. נניח כי $ab \in (Q : x)$, כלומר $abx \in Q$. אם $\sqrt{(Q : x)} = \sqrt{Q}$, אז $b \notin P$, אז בהכרח $ax \in Q$, כי Q פרימרי, ולכן $a \in (Q : x)$. לכן סיימנו.

3. נניח כי $a \in (Q : x)$, כלומר $ax \in Q$. לכן $a \in Q$ ולכן $x \notin P = \sqrt{Q}$. לכן $a \in Q$ ולכן $x \notin P$. ההכלה השנייה תמידה נכונה, ולכן השוויון. ■

הגדרה 1.8 אידאל I בחוג R ייקרא פריק אם אפשר לכתוב את I בתור חיתוך סופי של אידאלים פרימריים. חיתוך שכזה ייקרא גם פירוק של I . פירוק

$$I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$$

לחיתוך של אידאלים פרימריים ייקרא מינימלי אם הרדיקלים $P_i = \sqrt{Q_i}$ הם אידאלים ראשוניים שונים זה מזה, וכן אין אידאל Q_i שמכיל חיתוך של אידאלים אחרים Q_j, Q_k .

תמיד ניתן להביא פירוק כלשהו של I לפירוק מינימלי. באותם סימונים של ההגדרה, אם $Q_{i_1}, \dots, Q_{i_k}$ אידאלים פרימריים ביחס לאותו אידאל ראשוני P , אז ראינו שגם החיתוך שלהם הוא אידאל פרימרי ביחס לאותו אידאל ראשוני P . לכן בפירוק עצמו נוכל להחליף את כל האידאלים הללו בחיתוך שלהם.

1.2 משפט היחידות הראשון

משפט 1.9 יהי $I \subseteq R$ אידאל פריק. יהי

$$I = \bigcap_{i=1}^n Q_i$$

פירוק מינימלי של I . נסמן $P_i = \sqrt{Q_i}$. אזי $\{P_1, \dots, P_n\}$ נקבעים ביחידות: הם בדיוק כל האידאלים הראשוניים השייכים לקבוצה

$$\left\{ \sqrt{(I : x)} \mid x \in R \right\}$$

הוכחה: נתובן באידאל $(I : x)$, עבור $x \in R$ כלשהו.

$$\begin{aligned} (I : x) &= \left(\bigcap_{i=1}^n Q_i : x \right) = \bigcap_{i=1}^n (Q_i : x) \\ \sqrt{(I : x)} &= \sqrt{\bigcap_{i=1}^n (Q_i : x)} = \bigcap_{i=1}^n \sqrt{(Q_i : x)} = \bigcap_{i \in \{i \mid x \notin Q_i\}} P_i \end{aligned}$$

המעבר האחרון הוא מתוך למה 1.7. אם $\sqrt{(Q_i : x)}$ אידאל ראשוני, נסיק כי יש $1 \leq j \leq n$ עבורו $x \notin Q_j$ וכן $\sqrt{(I : x)} = P_j$. לכן כל אידאל ראשוני מהצורה $\sqrt{(I : x)}$ הוא אחד מבין P_i . כמו כן, עבור $1 \leq i_0 \leq n$, נבחר

$$x_{i_0} \in \bigcap_{j \neq i_0} Q_j \setminus Q_{i_0}$$

אז מתקיים

$$(I : x) = \bigcap_{i \in \{i \mid x \notin Q_i\}} (Q_i : x) = (Q_{i_0} : x) \Rightarrow \sqrt{(I : x)} = \sqrt{(Q_{i_0} : x)} = P_{i_0}$$

■

וזה מראה את ההכלה השנייה, ולכן סיימנו.