

אלגברה ב3

© ארזים

8 בדצמבר 2016

1 אידאלים בחוג שברים

בשיעור שעבר ראינו שבחוג $S^{-1}R$, עבור $S \subseteq R$ כפליית עם ההומומורפיזם $f(r) = \frac{r}{1}$, כל אידאל הוא מהצורה $S^{-1}I$ עבור I אידאל של R .

טענה 1.1 $S^{-1}I = S^{-1}R$ אם ורק אם $I \cap S \neq 0$.

הוכחה: נניח כי $S^{-1}I = S^{-1}R$. מתקיים $\frac{1}{1} \in S^{-1}I$, כלומר יש $x \in I$ וגם $s \in S$ עבורם $\frac{x}{s} = \frac{1}{1}$, כלומר יש $z \in S$ עבורו

$$\begin{aligned} z(x - s) &= 0 \\ I \ni zx &= zs \in S \end{aligned}$$

ולכן החיתוך לא ריק.
נניח כי $s \in I \cap S$. אזי

$$\frac{1}{1} = \frac{s}{s} \in S^{-1}I$$

ולכן $S^{-1}I = S^{-1}R$.

■

נשים לב כי $S^{-1}I$ הוא האידל שנוצר על ידי התמונה $f(I)$.
יהי R אידאל, ונניח כי $f^{-1}(J) = R$ עבור $J \subseteq S^{-1}R$ אידאל. ראינו כי $J = S^{-1}I$.

$$I = f^{-1}(J) = f^{-1}(S^{-1}I) = \bigcup_{s \in S} (I : s)$$

I הוא איחוד של אידאלים שמכילים אותו, כלומר $(I : s) = I$ לכל $s \in S$. כלומר, נקבל כי לכל $x \in I$, אם ורק אם $sx \in I$, בחוג R/I זה אומר

$$s(x + I) = I \iff x + I = I$$

לכן אין בחוג R/I איבר שאינו 0 שמתאפס על ידי כפל באיזשהו איבר $s \in S$.
להיפך, אם התנאי האחרון מתקיים, אז $(I : s) = I$ לכל $s \in S$, ולכן $I = f^{-1}(S^{-1}I)$.
- כלומר I תמונה הפוכה של אידאל מתוך $S^{-1}R$.

משפט 1.2 תהי $S \subseteq R$ קבוצה כפלית. יש התאמה חד־חד־ערכית ועל בין האידאלים הראשוניים של $S^{-1}R$ והאידאלים הראשוניים של R אשר זרים לקבוצה S . ההתאמה היא

$$R \supseteq P \mapsto S^{-1}P$$

$$f^{-1}(Q) \leftrightarrow Q \subseteq S^{-1}R$$

הוכחה: יהי $Q \subseteq S^{-1}R$ אידאל ראשוני. אזי $f^{-1}(Q) = P$ אידאל ראשוני של R (זאת עובדה כללית - תמונה הפוכה של אידאל ראשוני תחת הומומורפיזם היא אידאל ראשוני). ראינו כי $Q = S^{-1}P$, וכיוון שמתקיים $Q \subsetneq S^{-1}R$, נקבל כי $P \cap S = \emptyset$. נניח כעת יהי $P \subseteq R$ אידאל ראשוני שזר לקבוצה S . נראה כי $S^{-1}P$ אידאל ראשוני. נניח כי $\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} \in S^{-1}P$ עבור $x, y \in R, s, t \in S$. לכן יש $a \in P, z \in S$ שעבורם

$$\frac{xy}{st} = \frac{a}{z}$$

לכן יש $u \in S$ כך שמתקיים

$$u(xyz - ast) = 0$$

$$uxyz = uast \in P$$

P ראשוני, ולכן $xy \in P$ או $zu \in P$. $zu \in P$ או $zu \in S$. ולכן $zu \notin P$ כי P זרה לקבוצה S , ולכן $xy \in P$. לכן $x \in P$ או $y \in P$, כלומר $\frac{x}{s} \in S^{-1}P$ או $\frac{y}{t} \in S^{-1}P$. כעת, נניח כי $S^{-1}P_1 = S^{-1}P_2$, כאשר $P_1, P_2 \subseteq R$ אידאלים ראשוניים. אזי

$$f^{-1}(S^{-1}P_1) = f^{-1}(S^{-1}P_2)$$

$$\bigcup_{s \in S} (P_1 : s) = \bigcup_{s \in S} (P_2 : s)$$

כעת, אם $s \in S$ וכן $xs \in P_i$, אזי $s \notin P_i$, כלומר $x \in P_i$. לכן לכל $s \in S$ מתקיים

$$(P_i : s) = P_i$$

לכן נקבל

$$P_1 = P_2$$

וההתאמה שלנו חד־חד־ערכית. כעת, אם $f^{-1}(Q_1) = f^{-1}(Q_2) = P$, אזי $Q_1 = S^{-1}P = Q_2$, ולכן ההעתקה חד־חד־ערכית ועל. ■

דוגמא יהי $P \subseteq R$ אידאל ראשוני ונקח $S = R \setminus P$. מסמנים $S^{-1}P = R_P$. יש התאמה חד-חד-ערכית ועל בין האידאלים הראשוניים של R_P והאידאלים הראשוניים של R שמוכלים בתוך P .

נניח כי $Q \subseteq P \subseteq R$ אידאל ראשוני של R . מסמנים $S^{-1}Q = Q_P$. אזי

$$R_P/Q_P \cong (R/Q)_P$$

זאת כמודולים מעל R_P . אלה הם גם חוגים, וקל לראות שאותו איזומורפיזם הוא גם איזומורפיזם של חוגים.

נרצה לדעת כיצד נראה אידאל ראשוני בחוג R_P/Q_P . אנחנו יודעים שיש להם את הצורה J/Q_P , כאשר $Q_P \subseteq J \subseteq R_P$ אידאל ראשוני. לכן יש אידאל ראשוני (יחיד) $J = L_P$, $L \subseteq P$ עבורו $L \subseteq R$.

נסמן, כמו קודם, $f(r) = \frac{r}{1}$. אזי אנחנו יודעים כי $L = f^{-1}(L_P) \supseteq f^{-1}(Q_P) = Q$. לכן למעשה $Q \subseteq L \subseteq P$.

אם ניקח $Q = P$, אז P_P הוא האידאל המקסימלי היחיד של R_P . לכן R_P/P_P הוא שדה, R/P הוא תחום שלמות, והשדה $(R/P)_P$ הוא שדה המנות של R/P .

טענה 1.3 תהי $S \subseteq R$ תת קבוצה כפלית. יהי $I \subseteq R$ אידאל. אזי

$$S^{-1}(\sqrt{I}) = \sqrt{S^{-1}I}$$

הוכחה: נניח כי $\frac{x}{s} \in S^{-1}(\sqrt{I})$, כלומר $x \in \sqrt{I}, s \in S$. יהי n טבעי עבורו $x^n \in I$. אזי $\frac{x^n}{s^n} \in S^{-1}I$. לכן $\frac{x}{s} \in \sqrt{S^{-1}I}$.
בכיוון השני, נניח כי $\frac{x}{s} \in \sqrt{S^{-1}I}$, עבור $s \in S, x \in R$. יהי n טעי עבורו $\frac{x^n}{s^n} \in S^{-1}I$. אזי קיימים $a \in I, t \in S$ עבורם

$$\frac{x^n}{s^n} = \frac{a}{t}$$

לכן קיים $z \in S$ עבורו

$$\begin{aligned} z(tx^n - as^n) &= 0 \\ ztx^n &= zas^n \\ (tx)^n &= a(zs)^n t^{n-1} \in I \end{aligned}$$

לכן $tx \in \sqrt{I}$, כלומר $\frac{x}{1} \in S^{-1}(\sqrt{I})$, כלומר $\frac{x}{s} \in S^{-1}(\sqrt{I})$.
קיבלנו הכלה דו כיוונית ולכן שוויון. ■

מקרה פרטי: $I = 0$. נקבל

$$S^{-1}(n(R)) = n(S^{-1}R)$$

משפט 1.4 יהי $\varphi : R_1 \rightarrow R_2$ הומומורפיזם של חוגים. נתון אידאל ראשוני $P \subseteq R_1$. אזי יש אידאל ראשוני $Q \subseteq R_2$ עבורו $\varphi^{-1}(Q)$ אם ורק אם

$$P = \varphi^{-1}(R_2\varphi(P))$$

הוכחה: הכיוון הפשוט מבין השניים הוא כללי. נניח כי $P = \varphi^{-1}(Q)$. אזי

$$\varphi(P) \subseteq Q$$

$$R_2\varphi(P) \subseteq Q$$

$$\varphi^{-1}(R_2\varphi(P)) \subseteq \varphi^{-1}(Q) = P$$

ההכלה השנייה תמיד נכונה, ולכן נקבל את השוויון שרצינו. הכיוון השני אינו טריוויאלי, ונוכיח אותו בפעם הבאה.

■