

אלגברה ב3

© ארזים

5 בדצמבר 2016

1 חוגי ומודולי שברים

בשיעור שעבר דיברנו על מודולי שברים, וראינו כי על הפעולה של מעבר לקיחת S^{-1} , למודולים והומומורפיזמים שלהם מעל R , היא פעולה מדויקת. בפרט, אם $U \subseteq M$ מודולים מעל R , נוכל להתבונן בסדרה המדויקת:

$$0 \rightarrow U \hookrightarrow M$$

ולקבל שגם הסדרה הבאה מדויקת:

$$0 \rightarrow S^{-1}U \rightarrow S^{-1}M$$

ולכן נראה את $S^{-1}U \subseteq S^{-1}M$ כתת מודול.

טענה 1.1 נתונים מודולים ותת מודולים $M, N \subseteq L$ מעל R , וכן $S \subseteq R$ קבוצה כפלית. אז:

1.

$$S^{-1}(M + N) = S^{-1}M + S^{-1}N$$

2.

$$S^{-1}(M \cap N) = S^{-1}M \cap S^{-1}N$$

3.

$$S^{-1}(L/N) \cong S^{-1}L/S^{-1}N$$

הוכחה:

1. $S^{-1}(M) + S^{-1}(N) \subseteq S^{-1}(M + N)$ ולכן $S^{-1}(M), S^{-1}(N) \subseteq S^{-1}(M + N)$.
 בכיוון השני, יהי $\frac{m+n}{s} \in S^{-1}(M + N)$, נוכל לכתוב

$$\frac{m+n}{s} = \frac{m}{s} + \frac{n}{s} \in S^{-1}M + S^{-1}N$$

מכאן מקבלים את ההכלה השנייה.

2. ברור כי $M \cap N \subseteq M, N$ ולכן

$$S^{-1}(M \cap N) \subseteq S^{-1}(M), S^{-1}(N)$$

$$S^{-1}(M \cap N) \subseteq S^{-1}(M) \cap S^{-1}(N)$$

בכיוון השני, נניח כי

$$S^{-1}(M) \cap S^{-1}(N) \ni x = \frac{m}{s} = \frac{n}{t}$$

עבור $s_0 \in S$ מכאן שקיים $m \in M, n \in N, s, t \in S$ עבורו

$$s_0(tm - sn) = 0$$

$$M \ni s_0tm = s_0sn \in N$$

נסמן את האיבר שקיבלנו w , אזי $w \in M \cap N$ לכן

$$x = \frac{m}{s} = \frac{s_0tm}{s_0ts} = \frac{w}{s_0ts} \in S^{-1}(M \cap N)$$

וקיבלנו את ההכלה השנייה.

3. נתבונן בסדרה המדויקת:

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{i} L \xrightarrow{\nu} L/N \rightarrow 0$$

לכן גם הסדרה הבאה מדויקת:

$$0 \rightarrow S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}i} S^{-1}L \xrightarrow{S^{-1}\nu} S^{-1}(L/N) \rightarrow 0$$

כעת, מתקיים $\ker S^{-1}\nu = \text{Im } S^{-1}i = S^{-1}N$ וכן $\text{Im } S^{-1}\nu = S^{-1}(L/N)$ ולכן
 ממשפט האיזומורפיזם הראשון:

$$S^{-1}L/S^{-1}N \cong S^{-1}(L/N)$$

$$\frac{l}{s} + S^{-1}N \mapsto \frac{l+N}{s}$$

■

טענה 1.2 יהי M מודול מעל R , ותהי $S \subseteq R$ כפלית. אזי

$$S^{-1}R \otimes_R M \cong S^{-1}M$$

כמודולים מעל $S^{-1}R$.

הוכחה: נגדיר

$$\begin{aligned} \varphi : S^{-1}R \times M &\rightarrow S^{-1}M \\ \varphi\left(\frac{r}{s}, m\right) &= \left(\frac{rm}{s}\right) \end{aligned}$$

כמובן, φ בילינארית מעל R . למשל:

$$\begin{aligned} \varphi\left(a \cdot \frac{r}{s}, m\right) &= \varphi\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{r}{s}, m\right) = \varphi\left(\frac{ar}{s}, m\right) = \frac{arm}{s} = \\ &= \frac{a}{1} \cdot \frac{rm}{s} = a \cdot \frac{rm}{s} = a \cdot \varphi\left(\frac{r}{s}, m\right) \\ \varphi\left(\frac{r}{s}, a \cdot m\right) &= \frac{ram}{s} = \frac{a}{1} \cdot \frac{rm}{s} = a \cdot \frac{rm}{s} = a \cdot \varphi\left(\frac{r}{s}, m\right) \end{aligned}$$

φ מגדירה, אם כן, הומומורפיזם יחיד של מודולים מעל R ,

$$\begin{aligned} \varphi' : S^{-1}R \otimes_R M &\rightarrow S^{-1}M \\ \varphi'\left(\frac{r}{s} \otimes m\right) &= \frac{rm}{s} \end{aligned}$$

ברור כי φ' הוא גם הומומורפיזם של מודולים מעל $S^{-1}R$:

$$\varphi'\left(\frac{a}{t} \cdot \left(\frac{r}{s} \otimes m\right)\right) = \varphi'\left(\frac{ar}{ts} \otimes m\right) = \frac{arm}{ts} = \frac{a}{t} \cdot \frac{rm}{s} = \frac{a}{t} \varphi'\left(\frac{r}{s} \otimes m\right)$$

ברור כי φ' על. נותר להראות כי הוא חד־חד־ערכי. נניח כי

$$\sum_{i=1}^k \frac{r_i}{s_i} \otimes m_i \in \ker \varphi'$$

כלומר

$$\sum_{i=1}^k \frac{r_i m_i}{s_i} = 0$$

נסמן $s = s_1 \cdot \dots \cdot s_k$, וכן $t_i = \frac{s}{s_i}$, ואז נפתח את הנתון:

$$\sum_{i=1}^k \frac{r_i m_i}{s_i} = \sum_{i=1}^k \frac{t_i r_i m_i}{s} = \frac{0}{1}$$

לכן קיים $u \in S$ כך שמתקיים

$$u \cdot \sum_{i=1}^k t_i r_i m_i = 0$$

כעת,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{s_i} \otimes m_i &= \sum_{i=1}^k \frac{t_i r_i}{s} \otimes m_i = \sum_{i=1}^k \frac{u t_i r_i}{us} \otimes m_i = \sum_{i=1}^k \frac{1}{us} \otimes u t_i r_i m_i = \\ &= \frac{1}{us} \otimes \left(\sum_{i=1}^k u t_i r_i m_i \right) = \frac{1}{us} \otimes 0 = 0 \end{aligned}$$

■ לכן φ' חד־חד־ערכי, ולכן גם איזומורפיזם.

מסקנה 1.3 $S^{-1}R$ הוא מודול שטוח מעל R .

הוכחה: נניח כי $\varphi : U \rightarrow V$ מונומורפיזם של מודולים מעל R . נסמן את האיזומורפיזמים הבאים, שהוכחנו שקיימים

$$\begin{aligned} i : S^{-1}R \otimes_R U &\rightarrow S^{-1}U \\ j : S^{-1}R \otimes V &\rightarrow S^{-1}V \end{aligned}$$

ואז נגדיר $\xi = j \circ (id \otimes \varphi) \circ i^{-1}$. נראה כי $\xi = S^{-1}\varphi$, ומדיוק לקיחת S^{-1} נקבל את מה שרצינו.

$$\xi\left(\frac{u}{s}\right) = \xi\left(i\left(\frac{1}{s} \otimes u\right)\right) = j\left((id \otimes \varphi)\left(\frac{1}{s} \otimes u\right)\right) = j\left(\frac{1}{s} \otimes \varphi(u)\right) = \frac{\varphi(u)}{s} = S^{-1}\varphi\left(\frac{u}{s}\right)$$

■

טענה 1.4 נתונים שני מודולים M, N מעל R , וכן $S \subseteq R$ קבוצה כפלית. אזי

$$\begin{aligned} S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N &\cong S^{-1}(M \otimes_R N) \\ \frac{m}{s} \otimes \frac{n}{t} &\mapsto \frac{m \otimes n}{st} \end{aligned}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
 S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N &\cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} (S^{-1}R \otimes_R N) \cong \\
 &\cong (S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}R) \otimes_R N \cong \\
 &\cong (S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}R) \otimes_R N \cong \\
 &\cong S^{-1}M \otimes_R N \cong (S^{-1}R \otimes_R M) \otimes_R N \cong \\
 &\cong S^{-1}R \otimes_R (M \otimes_R N) \cong S^{-1}(M \otimes_R N)
 \end{aligned}$$

■

1.1 תכונות מקומיות

כאשר $S = R \setminus P$, עבור $P \subseteq R$ אידאל ראשוני, אז הסימונים שלנו הם:

$$\begin{aligned}
 S^{-1}R &= R_P \\
 S^{-1}M &= M_P \\
 S^{-1}\varphi &= \varphi_P
 \end{aligned}$$

טענה 1.5 יהי M מודול מעל R . אזי התנאים הבאים שקולים:

$$1. M = 0$$

$$2. M_P = 0 \text{ לכל אידאל ראשוני } P.$$

$$3. M_m = 0 \text{ לכל אידאל מקסימלי } m.$$

הוכחה: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3$: טריוויאלי, מודל שברים של מודול האפס הוא מודול האפס, וכל אידאל מקסימלי הוא בפרט ראשוני.

$3 \Rightarrow 1$: נניח בשלילה כי $M \neq 0$, ויהי $v \in M, v \neq 0$. נתבונן באידאל

$$I = \text{Ann}_R(v) = \{r \in R \mid r \cdot v = 0\}$$

$I \neq R$, כי למשל $1 \notin I$. יהי m אידאל מקסימלי כלשהו שמכיל את I . נתבונן באיבר $\frac{v}{1} \in M_m = 0$, ולכן $\frac{v}{1} = \frac{0}{1}$. כלומר קיים $s \in R \setminus m$ עבורו $sv = 0$, ולכן $s \in I \subseteq m$, וזו סתירה, כי $s \in R \setminus m$. ■

טענה 1.6 יהי $\phi : M \rightarrow N$ הומומורפיזם של מודולים מעל R . אזי התכונות הבאות שקולות:

$$1. \phi \text{ חד-חד-ערכי.}$$

$$2. \phi_P \text{ חד-חד-ערכי לכל אידאל ראשוני } P.$$

$$3. \phi_m \text{ חד-חד-ערכי לכל אידאל מקסימלי } m.$$

הוכחה: $1 \Rightarrow 2$: ידוע לנו כבר, משום שתמיד $S^{-1}\phi$ חד-חד-ערכי, לכל S כפליית ולכל ϕ חד-חד-ערכי. בפרט זה נכון עבור $S = R \setminus P$, לכל אידאל ראשוני P .
 $2 \Rightarrow 3$: ברור, כל אידאל מקסימלי הוא בפרט ראשוני.
 $3 \Rightarrow 1$: נסמן $M' = \ker \phi$. זהו תת מודול של M . הסדרה הבאה מדויקת:

$$0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\phi} N$$

כאשר i הוא הומומורפיזם ההכלה. כעת נוכל לעבור למודולי שברים ולשמור דיוק:

$$0 \rightarrow M'_m \xrightarrow{i_m} M_m \xrightarrow{\phi_m} N_m$$

אם כן, מתקיים $0 = \ker \phi_m = M'_m$. זה כמובן נכון לכל אידאל מקסימלי m , ולכן $M' = 0$ מהטענה הקודמת, ולכן ϕ חד-חד-ערכי. ■

טענה 1.7 יהי $\phi : M \rightarrow N$ הומומורפיזם של מודולים מעל R . התנאים הבאים שקולים:

1. ϕ על.

2. ϕ_P על לכל אידאל ראשוני P .

3. ϕ_m על לכל אידאל מקסימלי m .

הוכחה: $1 \Rightarrow 2$: ידוע לנו כבר, משום שתמיד $S^{-1}\phi$ על, לכל S כפליית ולכל ϕ על. בפרט זה נכון עבור $S = R \setminus P$, לכל אידאל ראשוני P .
 $2 \Rightarrow 3$: ברור, כל אידאל מקסימלי הוא בפרט ראשוני.
 $3 \Rightarrow 1$: נסמן $N' = \text{Im } \phi$. זהו תת מודול של N . הסדרה הבאה מדויקת:

$$M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{\nu} N/N' \rightarrow 0$$

כאשר ν הוא הומומורפיזם המנה. כעת נוכל לעבור למודולי שברים ולשמור דיוק:

$$M_m \xrightarrow{\phi_m} N_m \xrightarrow{\nu_m} (N/N')_m \rightarrow 0$$

אם כן, מתקיים $N_m = \ker \nu_m$, כלומר $\nu_m = 0$, אבל על, ולכן $(N/N')_m = 0$. זה כמובן נכון לכל אידאל מקסימלי m , ולכן $N/N' = 0$ מטענה קודמת. לכן $N' = N$, כלומר ϕ על. ■

טענה 1.8 יהי M מודול מעל R . התנאים הבאים שקולים:

1. M מודול שטוח מעל R .

2. M_P מודול שטוח מעל R_P לכל אידאל ראשוני P .

3. M_m מודול שטוח מעל R_m לכל אידאל מקסימלי m .

הוכחה: $2 \Rightarrow 1$: $M_P = S^{-1}M$, עבור $S = R \setminus P$. ראינו כי $S^{-1}M \cong S^{-1}R \otimes_R M \cong R_P \otimes_R M$, ולכן M_P הוא איזומורפי מעל R_P למודול הרחבת סקלרים לחוג R_P שמתקבל מהמודול M . ראינו בעבר כי הרחבת סקלרים של מודול שטוח נותנת מודול שטוח.
 $2 \Rightarrow 3$: ברור, כל אידאל מקסימלי הוא בפרט ראשוני.
 $3 \Rightarrow 1$: יהי $\varphi : U \rightarrow V$ מונומורפיזם של מודולים מעל R . נרצה להראות כי גם $\text{id}_M \otimes \varphi : M \otimes_R U \rightarrow M \otimes_R V$ מונומורפיזם. אנחנו יודעים כי $\varphi_m : U_m \rightarrow V_m$ הוא מונומורפיזם לכל אידאל מקסימלי m . ראינו כי

$$\begin{aligned} M_m \otimes_{R_m} U_m &\cong (M \otimes_R U)_m \\ M_m \otimes_{R_m} V_m &\cong (M \otimes_R V)_m \end{aligned}$$

נקרא לאיזומורפיזמים i, j בהתאמה. כיוון שידוע כי M_m מודול שטוח מעל R_m , נובע כי $\text{id}_{M_m} \otimes \varphi_m : M_m \otimes_{R_m} U_m \rightarrow M_m \otimes_{R_m} V_m$ נגדיר $\xi = j \circ (\text{id}_{M_m} \otimes \varphi_m) \circ i^{-1}$.
 כעת, עבור $m \in M, u \in U, s, t \in S = R \setminus m$, מתקיים

$$\begin{aligned} (j \circ (\text{id}_{M_m} \otimes \varphi_m)) \left(\frac{m}{s} \otimes \frac{u}{t} \right) &= j \left(\frac{m}{s} \otimes \frac{\varphi(u)}{t} \right) = \frac{m \otimes \varphi(u)}{st} = \\ &= (\xi \circ i) \left(\frac{m}{s} \otimes \frac{u}{t} \right) = \xi \left(\frac{m \otimes u}{st} \right) \end{aligned}$$

לכן נובע למעשה כי $\xi = (\text{id}_M \otimes \varphi)_m$. כמובן, מההגדרה, נובע כי $(\text{id}_M \otimes \varphi)_m$ חד-חד-ערכי לכל אידאל מקסימלי m (כל הזמן הזה עבדנו עם אידאל מקסימלי כללי). לכן מטענה קודמת גם $\text{id}_M \otimes \varphi$ חד-חד-ערכי, כפי שרצינו. ■

1.2 האידאלים בחוג השברים

הערה 1.9 תהי $S \subseteq R$ קבוצה כפליית בחוג R . אם $I \subseteq R$ אידאל, אזי $S^{-1}I \subseteq S^{-1}R$ הוא תת מודול של $S^{-1}R$ מעל $S^{-1}R$, כלומר הוא אידאל של החוג $S^{-1}R$.

טענה 1.10 כל אידאל של $S^{-1}R$ הוא מהצורה $S^{-1}I$ עבור אידאל $I \subseteq R$.

הוכחה: יהי $J \subseteq S^{-1}R$ אידאל. כזכור, יש לנו הומומורפיזם של חוגים:

$$\begin{aligned} f : R &\rightarrow S^{-1}R \\ f(r) &= \frac{r}{1} \end{aligned}$$

התמונה ההפוכה $I = f^{-1}(J)$ היא אידאל של R (נכון באופן כללי על תמונה הפוכה של אידאל תחת הומומורפיזם של חוגים). נראה כי $J = S^{-1}I$.
 נניח כי $\frac{a}{s} \in S^{-1}I$, עבור $a \in I, s \in S$. כלומר $\frac{a}{1} = f(a) \in J$. אידאל, ולכן $\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{a}{s} \in J$. לכן הוכחנו $S^{-1}I \subseteq J$.
 בכיוון השני, נניח כי $\frac{r}{s} \in J$, עבור $r \in R, s \in S$. לכן $\frac{r}{s} \cdot \frac{s}{1} = \frac{r}{1} = f(r) \in J$. לכן נובע $r \in f^{-1}(J) = I$. כלומר $\frac{r}{s} \in S^{-1}I$. לכן הוכחנו $J \subseteq S^{-1}I$. ■

יהי $I \subseteq R$. ניתן תיאור של

$$\begin{aligned} I \subseteq f^{-1}(S^{-1}I) &= \left\{x \in R \mid \frac{x}{1} \in S^{-1}I\right\} = \left\{x \in R \mid \exists y \in I, s \in S. \frac{x}{1} = \frac{y}{s}\right\} = \\ &= \{x \in R \mid \exists y \in I, t, s \in S. t(sx - y) = 0\} = \{x \in R \mid \exists y \in I, t, s \in S. tsx = yt\} = \\ &= \{x \in R \mid \exists z \in S. zx \in I\} \end{aligned}$$

לכל $z \in I$ נסמן

$$(I : z) = \{x \in R \mid z \cdot x \in I\}$$

קוראים I חלקי z . בבירור, זהו אידאל שמכיל את I . לכן בסך הכל:

$$f^{-1}(S^{-1}I) = \bigcup_{z \in S} (I : z)$$