

אלגברה ב3

© ארזים

1 בדצמבר 2016

1 חוגי שברים

מעתה נגיד חוג שברים במקום חוג מנות, כדי למנוע בלבול עם חוג מנה. יהי R חוג, ותהי S קבוצה כפלית. בנינו כבר את חוג השברים $S^{-1}R$.

טענה 1.1 נניח כי $g : R \rightarrow B$ הומומורפיזם של חוגים, כך שלכל $s \in S$ האיבר $g(s)$ הפיך. אזי יש הומומורפיזם יחיד $h : S^{-1}R \rightarrow B$ עבורו $h \circ f = g$, כאשר $f(x) = \frac{x}{1}$.

הוכחה: נגדיר

$$h\left(\frac{a}{s}\right) = g(a)g(s)^{-1}$$

נראה שההגדרה טובה: נניח כי $\frac{a}{s} = \frac{a'}{s'}$. לכן יש $t \in S$ עבורו $t(as' - a's) = 0$, ולכן

$$\begin{aligned} g(t)(g(a)g(s') - g(a')g(s)) &= 0 \\ g(a)(s') &= g(a')g(s) \\ g(a)g(s)^{-1} &= g(a')g(s')^{-1} \end{aligned}$$

השתמשנו כמובן בכך שהאיבר $g(t)$ הפיך, כי $t \in S$. h הומומורפיזם שכן

$$\begin{aligned} h\left(\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'}\right) &= h\left(\frac{as' + a's}{ss'}\right) = g(as' + a's)g(ss')^{-1} = \\ &= (g(a)g(s') + g(a')g(s))g(s)^{-1}g(s')^{-1} = \\ &= g(a)g(s)^{-1} + g(a')g(s')^{-1} = h\left(\frac{a}{s}\right) + h\left(\frac{a'}{s'}\right) \end{aligned}$$

נציב $s = 1$ בהגדרת h :

$$h(f(a)) = h\left(\frac{a}{1}\right) = g(a)$$

לכן נותר להראות רק כי h נקבע ביחידות על ידי התכונה $h \circ f = g$:

$$h\left(\frac{1}{s}\right) = \left(h\left(\frac{s}{1}\right)\right)^{-1} = (h(f(s)))^{-1} = g(s)^{-1}$$

לכן נובע כי

$$h\left(\frac{a}{s}\right) = h\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{s}\right) = h\left(\frac{a}{1}\right) h\left(\frac{1}{s}\right) = h(f(a)) g(s)^{-1} = g(a) g(s)^{-1}$$

■

$S^{-1}R$ מקיים את התכונות הבאות:

1. $f(s)$ תמיד הפיך, לכל $s \in S$.

2. $a \in \ker f$ אם ורק אם קיים $t \in S$ עבורו $ta = 0$.

3. איברי $S^{-1}R$ הם מהצורה $f(a) f(s)^{-1}$, כאשר $a \in R, s \in S$.

טענה 1.2 יהי B חוג כך שיש $g : R \rightarrow B$ הומומורפיזם המקיים:

1. $g(s) \in B^*$ לכל $s \in S$.

2. $a \in \ker g$ אם ורק אם קיים $t \in S$ עבורו $ta = 0$.

3. כל איבר של B הוא מהצורה $g(a) g(s)^{-1}$, כאשר $a \in R, s \in S^{-1}$.

אזי $R \cong S^{-1}R$ על ידי $\frac{a}{s} \mapsto g(a) g(s)^{-1}$.

הוכחה: יהי

$$h : S^{-1}R \rightarrow B$$

אותו הומומורפיזם שהגדרנו בהוכחת הטענה הקודמת, כלומר $h\left(\frac{a}{s}\right) = g(a) g(s)^{-1}$.
ידוע לנו כבר כי זהו הומומורפיזם.

כעת, נניח כי $h\left(\frac{a}{s}\right) = 0$. זה שקול לכך שמתקיים $g(a) = 0$, כלומר $a \in \ker g$. אזי קיים $t \in S$ עבורו $ta = 0$. מכאן, $\frac{a}{s} = \frac{0}{1}$, שכן $t(a \cdot 1 - 0 \cdot s) = 0$.
על, כמסקנה ישירה מתכונה 3 שבטענה.

■

דוגמא ניקח שוב את P להיות אידאל ראשוני של החוג R , ונסמן $S = R \setminus P$. מסמנים במצב זה $R_P = S^{-1}R$, וחוג זה נקרא הלוקליזציה של R באידאל P .

טענה 1.3 R_P הוא חוג מקומי.

הוכחה: נגדיר

$$m = \left\{ \frac{x}{s} \mid x \in P, s \notin P \right\} \subseteq R_P$$

זהו אידאל של R_P , ואינו כל החוג, שכן איבר היחידה לא שם - אם $x \in P, s \notin P$ מקיימים $\frac{x}{s} = \frac{1}{1}$, זה אומר שקיים $t \in R \setminus P$ כך שמתקיים $t(x - s) = 0 \in P$. נובע כי $x - s \in P$, ולכן $s \in P$ בסתירה.

כעת נראה כי $R_P \setminus m = R_P^*$. אם $\frac{x}{s} \in R_P \setminus m$, עבור $x \in R, s \in R \setminus P$, נובע כי $x \notin P$, ולכן $x \in S$. לכן בסך הכל $\frac{x}{s}$ הפיך - ההופכי שלו הוא $\frac{s}{x}$. ההכלה השנייה תמיד נכונה, לכל אידאל שאינו כל החוג, ולכן קיבלנו שהאידאל m הוא האידאל המקסימלי היחיד בחוג.

■

2 מודול שברים

כעת, יהי M מודול מעל R , ותהי $S \subseteq R$ כפלית. נבנה את $S^{-1}M$.
נגדיר יחס שקילות על $M \times S$:

$$(u, s) \sim (v, t) \iff \exists s' \in S \quad s'(tu - sv) = 0$$

קל לבדוק שזה יחס שקילות. נסמן את מחלקת השקילות של (u, s) על ידי $\frac{u}{s}$ או $s^{-1}u$.
קבוצת מחלקות השקילות תסומן $S^{-1}M$.
על $S^{-1}M$ יש מבנה של מודול מעל $S^{-1}R$, על ידי

$$\begin{aligned} \frac{m}{s} + \frac{v}{t} &= \frac{tm + vs}{st} \\ \frac{a}{t} \frac{m}{s} &= \frac{am}{ts} \end{aligned}$$

כאשר $S = R \setminus P$ עבור P אידיאל ראשוני, נכתוב $S^{-1}M = M_P$, שהוא מודול מעל R_P .
נסמן בתור f את ההומומורפיזם $a \mapsto \frac{a}{1}$. כעת, נניח כי $g : M \rightarrow N$ הומומורפיזם של מודולים מעל R , אז יש לנו

$$\begin{aligned} S^{-1}g : S^{-1}M &\rightarrow S^{-1}N \\ S^{-1}g\left(\frac{m}{s}\right) &= \frac{g(m)}{s} \end{aligned}$$

זה כמובן הומומורפיזם של מודולים מעל R . אם

$$M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{\varphi} V$$

הומומורפיזמים של מודולים מעל R , אזי

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}V$$

כאשר

$$\begin{aligned} S^{-1}(\varphi \circ g) &= S^{-1}\varphi \circ S^{-1}g \\ S^{-1}(\varphi \circ g)\left(\frac{m}{s}\right) &= \frac{\varphi \circ g(m)}{s} = \frac{\varphi(g(m))}{s} = S^{-1}\varphi\left(\frac{g(m)}{s}\right) = \\ &= S^{-1}\varphi\left(S^{-1}g\left(\frac{m}{s}\right)\right) \end{aligned}$$

טענה 2.1 נניח כי

$$M \xrightarrow{g} N \xrightarrow{\varphi} V$$

סדרה מדויקת מעל R (כלומר $\text{Im} g = \text{Ker} \varphi$). אזי גם

$$S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}\varphi} S^{-1}V$$

סדרה מדויקת ($\text{Im}(S^{-1}g) = \text{Ker}(S^{-1}\varphi)$).

הוכחה: מהנתון $\varphi \circ g = 0$, ולכן

$$0 = S^{-1}(\varphi \circ g) = S^{-1}(\varphi) \circ S^{-1}(g)$$

ולכן $\text{Im}(S^{-1}g) \subseteq \text{Ker}(S^{-1}\varphi)$. בכיוון השני, נניח כי $\frac{n}{s} \in \text{Ker}(S^{-1}\varphi)$, כלומר $\frac{n}{s} \in \text{Ker} \varphi = \text{Im} g$. לכן $tn \in \text{Ker} \varphi = \text{Im} g$ עבור $t \in S$ עובר $t\varphi(n) = \varphi(tn) = 0$. נכתוב $tn = g(m)$ לכן מתקיים

$$\frac{n}{1} = \frac{g(m)}{t}$$

לכן נובע כי

$$\frac{n}{s} = \frac{g(m)}{ts} = S^{-1}g\left(\frac{m}{ts}\right) \in \text{Im} S^{-1}g$$

■

לכן קיבלנו את ההכלה השנייה, ואת השוויון שרצינו בסך הכל.