

אלגברה ב3

© ארזים

1 בנובמבר 2016

הקורס עוסק במבוא לאלגברה קומוטטיבית, ובעיקר בחוגים קומוטטיביים.

1 חוגים קומוטטיביים

כנגיד "יהי R חוג" אנחנו מתכוונים להגיד "יהי R חוג קומוטטיבי עם יחידה, בו $1 \neq 0$ "

1.1 אידאלים

1. חיתוך כלשהו של אידאלים בחוג נתון R הוא אידאל.

2. סכום של אידאלים הוא גם כן אידאל:

$$\sum_{\alpha \in X} I_\alpha = \left\{ \sum_{i=1}^n r_{\alpha_i} \mid n \geq 0, \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subseteq X, r_{\alpha_i} \in I_{\alpha_i} \right\}$$

3. נתונה קבוצה $S \subseteq R$. האידאל הנוצר על ידי S הוא

$$I(S) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i s_i \mid n \geq 0, \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq R, \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq S \right\}$$

זהו האידאל הקטן ביותר של R שמכיל את S . זהו חיתוך כל האידאלים שמכילים את S .

מקרה פרטי: $S = \{s\}$, ואז $I(S) = R \cdot s = \{a \cdot s \mid a \in R\}$ נקרא אידאל ראשי, ונאמר שהוא נוצר על ידי האיבר s .

חוג שבו כל האידאלים ראשיים יקרא חוג ראשי. ניתן לכתוב גם

$$I(S) = \sum_{s \in S} Rs$$

4. מכפלה: יהיו I, J שני אידאלים בחוג R . נגדיר את האידאל

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i b_i \mid n \geq 0, a_i \in I, b_i \in J \right\}$$

באופן דומה נגדיר $I_1, I_2, \dots, I_n$.

סימון $R^* = \{a \in R \mid \exists b \in R. ab = 1\}$

R^* היא חבורה כפלית ביחס לכפל, שכן $(ab)(a^{-1}b^{-1}) = 1$.

טענה 1.1 1. יהי $I \subseteq R$ אידאל. אזי $I = R$ אם ורק אם $I \cap R^* \neq \emptyset$.

2. חוג R שאין בו אידאלים לא טריוויאליים הוא שדה.

3. בשדה אין אידאלים לא טריוויאליים.

הוכחה:

1. נניח כי $I \neq 0$. אם $I = R$, $I \cap R^* = I$. להיפך, אם $a \in I \cap R^*$, אזי $a^{-1} \cdot a = 1 \in I$, ולכן לכל $r \in R$ מתקיים $r = r \cdot 1 \in I$. כלומר $I = R$.

2. נניח כי בחוג R אין אידאלים לא טריוויאליים. יהי $a \in R$, $a \neq 0$. $Ra \subseteq R$ הוא אידאל, ולכן טריוויאלי. $Ra \neq 0$, שכן $a = 1 \cdot a \in Ra$, ולכן $Ra = R$. בפרט, $1 \in Ra$, כלומר קיים $b \in R$ כך שמתקיים $1 = ba$, ולכן a הפיך.

3. נניח כי R שדה. יהי $I \subseteq R$, $I \neq 0$ אידאל. בהכרח I מכיל איבר שונה מאפס, שבהכרח הפיך כי מדובר בשדה. לכן I מכיל איבר הפיך - ולכן הוא כל החוג.

■

הגדרה 1.2 נתונים שני אידאלים $I, J \subseteq R$. נאמר כי האידאלים זרים אם $I + J = R$. תנאי שקול: ניתן לכתוב $1 = u + v$, כאשר $u \in I, v \in J$.

דוגמא נניח כי $m, n \in \mathbb{Z}$ זרים. אזי קיימים a, b שלמים כך שמתקיים $am + bn = 1$. זה אומר שהאידאלים הראשיים $\mathbb{Z} \cdot m, \mathbb{Z} \cdot n$ זרים.

הערה 1.3 $\mathbb{Z}$ הוא חוג ראשי.

הוכחה: יהי $I \subseteq \mathbb{Z}$ אידאל. אם $I = 0$, אזי $I = \mathbb{Z} \cdot 0$. נניח $I \neq 0$. יהי n הטבעי המינימלי שמקיים $n \in I$. נראה כי $I = \mathbb{Z} \cdot n$. ראשית, $\mathbb{Z} \cdot n \subseteq I$, שכן I אידאל וכן $n \in I$. שנית, יהי $a \in I$. נחלק עם שארית:

$$a = ln + r$$

כאשר $0 \leq r < n$. כעת נקבל כי $r = a - ln \in I$. נקבל כי $r = 0$, ולכן $a = ln$. לכן $I \subseteq \mathbb{Z} \cdot n$, ובסך הכל $I = \mathbb{Z} \cdot n$.

■

הערה 1.4 באותו אופן, עבור שדה $\mathbb{F}$, חוג הפולינומים $\mathbb{F}[x]$ הוא חוג ראשי.

משפט 1.5 יהיו $I_1, \dots, I_n$ אידיאלים בחוג R . נתבונן בחוגי המנה $R/I_1, \dots, R/I_n$, ובהומומורפיזם:

$$\begin{aligned}\phi: R &\rightarrow R/I_1 \times \dots \times R/I_n \\ \phi(x) &= (x + I_1, \dots, x + I_n)\end{aligned}$$

אזי:

1. ϕ הוא הומומורפיזם על $\iff$ האידיאלים זרים בזוגות.
2. ϕ הוא הומומורפיזם חד-חד-ערכי $\iff$ חיתוך כל האידיאלים הוא טריוויאלי.
3. נניח כי האידיאלים זרים בזוגות. אזי

$$\bigcap_{j=1}^n I_j = \prod_{j=1}^n I_j$$

הוכחה:

1. נניח כי ϕ על. בפרט, לכל $1 \leq i \leq n$ קיים $x_i \in R$ המקיים

$$\phi(x_i) = (I_1, \dots, I_{i-1}, I_i + 1, I_{i+1}, \dots, I_n)$$

מההגדרה,

$$\phi(x_i) = (x + I_1, \dots, x + I_n)$$

ומכאן שמתקיים

$$\forall j \neq i \quad x \in I_j$$

וכן מתקיים $x_i \in 1 + I_i$, כלומר קיים $u_i \in I_i$ כך שמתקיים

$$\begin{aligned}x_i &= 1 + u_i \\ 1 &= x_i + (-u_i)\end{aligned}$$

כעת, $x_i \in I_j, u_i \in I_i$ ולכן I_i, I_j זרים לכל i, j .
בכיוון השני, נניח כי האידיאלים זרים בזוגות. לכל $1 \leq i \neq j \leq n$, נכתוב את 1 בתור

$$1 = u_{ij} + v_{ij}$$

כאשר $u_{ij} \in I_i, v_{ij} \in I_j$ נגדיר

$$x_i = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n v_{ij}$$

כמוכר, $v_{ij} \in I_j$, ולכן $x_i \in I_j$ לכל $i \neq j$. כמו כן, ניתן לכתוב

$$x_i = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n (1 - u_{ij})$$

כל גורם הוא בתוך $1 + I_i$, שהיא סגורה ביחס לכפל. כלומר, קיבלנו כי $x_i \in 1 + I_i$ נסיק כי

$$\phi(x_i) = (I_1, \dots, I_{i-1}, 1 + I_i, I_{i+1}, \dots, I_n)$$

יהיו $y_1, \dots, y_n$ בחוג. כעת,

$$\begin{aligned} \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) &= \sum_{i=1}^n \phi(x_i) \phi(y_i) = \sum_{i=1}^n (I_1, \dots, I_{i-1}, y_i + I_i, I_{i+1}, \dots, I_n) = \\ &= (y_1 + I_1, \dots, y_n + I_n) \end{aligned}$$

ולכן ϕ אכן על.

2. ϕ חד־חד־ערכי אם ורק אם $\ker \phi = 0$, ולפי ההגדרה

$$\begin{aligned} \ker \phi &= \{x \in R \mid (x + I_1, \dots, x + I_n) = (I_1, \dots, I_n)\} = \{x \in R \mid x \in I_1, \dots, x \in I_n\} = \\ &= \bigcap_{i=1}^n I_i \end{aligned}$$

בסך הכל ϕ חד־חד־ערכי אם ורק אם חיתוך כל האידיאלים הוא טריוויאלי.

3. תמיד מתקיים כי

$$\prod_{j=1}^n I_j \subseteq I_j$$

לכל j , ולכן

$$\prod_{j=1}^n I_j \subseteq \bigcap_{j=1}^n I_j$$

את ההכלה בכיוון השני נוכיח באינדוקציה על n . הבסיס הוא $n = 2$:

$$I_1 \cap I_2 = R(I_1 \cap I_2) = (I_1 + I_2)(I_1 \cap I_2) \subseteq I_1 \cdot I_2$$

זאת משום שאם ניקח $a \in I_1, b \in I_2, u \in I_1 \cap I_2$ נקבל

$$(a + b)u = au + bu$$

כאשר $au \in I_1 I_2, bu \in I_2 I_1$
עבור הצעד, נסמן

$$J = \prod_{i=1}^{n-1} I_i$$

באינדוקציה, מתקיים

$$J = \bigcap_{k=1}^{n-1} I_k$$

כעת נראה כי J זר לאידאל I_n . נתבונן באיבר

$$x_n = \prod_{j=1}^{n-1} v_{nj}$$

מתוך הוכחת הסעיף הראשון. מבניית x_n נובע כי מתקיים $x_n \in J$. כמו כן, ראינו כי $x_n \in 1 + I_n$. לכן קיים $a \in I_n$ כך שמתקיים

$$1 = x_n + (-a)$$

לכן J, I_n זרים, וכעת ממקרה הבסיס $n = 2$ מתקבל כי

$$\begin{aligned} J \cap I_n &= JI_n \\ \bigcap_{i=1}^n I_j &= \prod_{j=1}^n I_j \end{aligned}$$

■

מסקנה 1.6 נניח, בסימונים הקודמים, כי $I_1, \dots, I_n$ אידאלים זרים בזוגות. אזי ϕ משרה איזומורפיזם של חוגים

$$\begin{aligned} R / \left(\prod_{j=1}^n I_j \right) &\cong R / I_1 \times \cdots \times R / I_n \\ x + \prod_{j=1}^n I_j &\rightarrow (x + I_1, \dots, x + I_n) \end{aligned}$$

משום שמתקיים

$$\ker \phi = \bigcap_{j=1}^n I_j = \prod_{j=1}^n I_j$$

שכן האידאלים זרים בזוגות, וכן ϕ על.

כאשר $R = \mathbb{Z}$, נסמן

$$I_i = \mathbb{Z}m_i$$

כעת הם זרים בזוגות, כלומר $m_1, \dots, m_n$ זרים בזוגות (נניח כי הם טבעיים). כעת המסקנה אומרת לנו כי

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}m_1m_2\dots m_n \cong \mathbb{Z}/\mathbb{Z}m_1 \times \dots \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}m_n$$

וזה מוכר לנו כמשפט השאריות הסיני, מתורת המספרים.

1.2 אידאלים ראשוניים, אידאלים מקסימליים והרדיקל הנילי

הגדרה 1.7 החוג R ייקרא תחום שלמות אם לכל $a, b \in R$ מתקיים

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

טענה 1.8 נניח כי R תחום שלמות. אזי גם $R[x]$ - חוג הפולינומים במשתנה אחד מעל R - הוא תחום שלמות.

הוכחה: נניח כי $f(x), g(x) \neq 0$. נסמן

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^i$$

כאשר $a_n, b_m \neq 0$. כעת מתקיים כי

$$f(x)g(x) = a_n b_m x^{n+m} + h(x)$$

כאשר $h(x)$ הוא פולינום כלשהו מדרגה שקטנה ממש מאשר $m+n$. משום שנתון שהתחום R הוא תחום שלמות, $a_n b_m \neq 0$, ולכן קיבלנו בסך הכל כי $\deg(fg) = \deg f + \deg g$ (כאשר $\deg 0 = -\infty$).

מכאן כמובן שמתקיים $f(x)g(x) \neq 0$. ■

כך נוכל לייצר הרבה תחומי שלמות: למשל נתחיל עם שדה $\mathbb{F}$. ניקח את החוג $\mathbb{F}[x_1]$, שהוא תחום שלמות. כעת גם החוג $(\mathbb{F}[x_1])[x_2]$ הוא תחום שלמות, ואפשר להתייחס אליו בתור $\mathbb{F}[x_1, x_2]$ - פולינומים בשני משתנים מעל השדה $\mathbb{F}$. כך נמשיך להגדיר את $\mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ ולקבל תחום שלמות. אם נחליף את $\mathbb{F}$ בתחום שלמות R נקבל עדיין תחומי שלמות. יהי $I \subsetneq R$ אידאל (כאשר R חוג). נבדוק מתי R/I הוא תחום שלמות. נשים לב כי

$$(x+I)(y+I) = I \iff xy \in I$$

וכן

$$y + I = I \vee x + I = I \iff y \in I \vee x \in I$$

כדי לקבל תחום שלמות, נרצה שהתאנים הללו יהיו שקולים (מההגדרה). לכן בסך הכל מתקיים כי R/I תחום שלמות אם ורק אם מתקיים

$$xy \in I \iff x \in I \vee y \in I$$

הגדרה 1.9 אידאל שמקיים תכונה זו נקרא ראשוני.

דוגמא יהי $I \subsetneq \mathbb{Z}$ אידאל ראשוני. נסמן $I = \mathbb{Z} \cdot n$, כאשר n טבעי. מתקיים

$$\begin{aligned} xy \in \mathbb{Z} \cdot n &\Rightarrow x \in \mathbb{Z} \cdot n \vee y \in \mathbb{Z} \cdot n \\ n \mid xy &\Rightarrow n \mid x \vee n \mid y \end{aligned}$$

כלומר n הוא מספר ראשוני. בחוג הפולינומים מעל שדה היינו מקבלים כי האידאל חייב להיווצר על ידי פולינום אי פריק.

הגדרה 1.10 אידאל $I \subsetneq R$ נקרא מקסימלי אם האידאל היחיד שמכיל את I ממש הוא R .

טענה 1.11 $I \subsetneq R$ אידאל מקסימלי אם ורק אם חוג המנה R/I הוא שדה.

הוכחה: נניח כי I אידאל מקסימלי. אידאל בחוג R/I הוא מהצורה J/I , כאשר $I \subseteq J \subseteq R$. אידאל של R ממקסימליות I נובע כי $J = I$ או $J = R$, כלומר J/I הוא אידאל טריוויאלי של חוג המנה. לכן לחוג המנה אין אידאלים לא טריוויאליים, ומכאן שהוא שדה. כעת נניח כי R/I הוא שדה. יהי $I \subseteq J \subseteq R$. J/I הוא אידאל של השדה R/I , ולכן בהכרח טריוויאלי. מכאן בהכרח כי $J = I$ או $J = R$. לכן I אידאל מקסימלי. ■

מסקנה 1.12 אידאל מקסימלי הוא ראשוני (כי שדה הוא +תחום שלמות).

טענה 1.13 יהי R תחום שלמות ראשי. אזי כל אידאל ראשוני לא טריוויאלי של R הוא מקסימלי.

הוכחה: יהי $I \subsetneq R$ אידאל ראשוני לא טריוויאלי. יהי $I \subsetneq J \subseteq R$. ונראה כי בהכרח $J = R$. תחום ראשי, ולכן נכתוב $J = Ra$, $I = Ra$. הנחנו כי $I \subsetneq J$ ונראה כי Rb . בפרט, $a \in J$, כלומר ניתן לכתוב, עבור $r \in R$ כלשהו, $a = br \in I$. ראשוני, ולכן בהכרח $b \in I$ או $r \in I$. $r \in I$ שכן אחרת $J \subseteq I$, בסתירה. לכן $r \in I$. לכן קיים $s \in R$ כלשהו עבורו $r = sa$. בסך הכל נקבל כי $a = br = bsa$. בתחום שלמות אנחנו יכולים לצמצם איברים שאינם 0 - I אינו טריוויאלי, ולכן $a \neq 0$. בסך הכל קיבלנו כי $sb = 1$, כלומר b הפיך - ולכן $J = R$. ■