

אלגברה ב3

© ארזים

1 בינואר 2017

1 חוגי נתר

תרגיל יהי A חוג ויהי M מודול נתר מעל A . יהי

$$u : M \rightarrow M$$

הומומורפיזם על של מודולים מעל A . הוכיחו כי u הוא איזומורפיזם.

פתרון לכל $m \geq 0$ מתקיים

$$\ker(u^m) < M$$

כמו כן

$$\ker(u^m) < \ker(u^{m+1}) < \dots$$

ולכן קיים n עבורו

$$\ker(u^n) = \ker(u^{n+1}) = \dots$$

יהי $y \in \operatorname{Im}(u^n)$. אזי קיים $x \in M$ עבורו $y = u^n(x)$. כעת,

$$0 = u(y) = u(u^n(x)) = u^{n+1}(x)$$

לכן $x \in \ker(u^{n+1}) = \ker(u^n)$, כלומר $y = u^n(x) = 0$. אזי u חד-חד-ערכי על $\operatorname{Im}(u^n)$, ובגלל שנתון כי u על מתקיים

$$\operatorname{Im}(u^m) = M$$

לכן u חד חד ערכי וסיימנו.

טענה 1.1 יהי R חוג נתר. תהי $S \subseteq R$ קבוצה כפלית. הוכיחו כי $S^{-1}R$ נתר.

הוכחה: אפשרות 1: כל אידאל $b \subseteq S^{-1}R$ הוא מהצורה $S^{-1}a$ כאשר $a \subseteq R$ אידאל. לכן כל שרשרת של אידאלים בתוך $S^{-1}R$ מתייצבת.
אפשרות 2: כל אידאל של R נוצר סופית, למשל $a = (x_1, \dots, x_n)$, ואז $S^{-1}a = (\frac{x_1}{1}, \dots, \frac{x_n}{1})$. ■

תרגיל יהי A חוג נתר מקומי. יהי m האידאל המקסימלי. נסמן $k = A/m$. יהי M מודול נוצר סופית מעל A . אזי התנאים הבאים שקולים:

1. M חופשי.
2. M שטוח.
3. $m \otimes_A M \rightarrow A \otimes_A M$ חד-חד-ערכי.
4. במאמר מוסגר - "אני כותב משהו, אל תקראו את זה", אמר המתרגל - $\text{Tor}_1^A(k, M) = 0$.

פתרון $2 \Rightarrow 1$: A שטוח מעל A , וסכום ישר של שטוחים הוא שטוח.
 $2 \Rightarrow 3$: $(0 \rightarrow m \rightarrow A) \otimes M$
 $3 \Rightarrow 1$: $M \otimes_A k$ מרחב ווקטורי סוף מימדי מעל k . יהיו $x_1, \dots, x_n \in M$ כד שהתמונות שלהם $M \rightarrow M \otimes_A k$ בסיס של $M \otimes_A k$.
נגדיר $0 \rightarrow N \rightarrow A^n \xrightarrow{\alpha} M \rightarrow 0$, עבור $N = \ker \alpha$ ונרצה להוכיח כי $N = 0$, כלומר $M \cong A^n$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \dots \downarrow \dots \\
 m \otimes N & \rightarrow & m \otimes A^n & \rightarrow & m \otimes M & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 A \otimes N & \rightarrow & A \otimes A^n & \rightarrow & A \otimes M & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \rightarrow k \otimes N & \rightarrow & k \otimes A^n & \rightarrow & k \otimes M & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

זוהי דיאגרמה קומוטטיבית, השם ישמור את כולנו. ממנה, על ידי מרדף דיאגרמות מוגזם שאין לי דרך אמיתית לשחזר כאן, מקבלים כי $k \otimes N = 0$, וכי N נוצר סופית בגלל שהחוג A הוא חוג נתר. לכן, מנאקאימה, נקבל $N = 0$.

תרגיל (לבית) יהי A חוג נתר, ויהי M מודול מעל A שנוצר סופית. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. M שטוח מעל A .
2. M_P חופשי מעל A_P לכל P ראשוני.
3. M_m חופשי מעל A_m לכל m מקסימלי.

"הסלוגן: שטוח זה חופשי מקומית!" - המתרגל

הגדרה 1.2 יהי A חוג ויהי M מודול מעל A . האידאל הראשוני $P \subseteq A$ נקרא ראשוני משוייך למודול M אם קיים $x \in M$ כך שמתקיים

$$P = \text{Ann}(x)$$

באופן שקול, במודול M יש תת מודול שאיזומורפי למנה A/P .

תרגיל יהי A חוג ויהי M מודול מעליו. נסמן $\Sigma = \{\text{Ann}(x) \mid 0 \neq x \in M\}$ קבוצת אידאלים לא ריקה. כל איבר מקסימלי בתוך Σ הוא ראשוני שמשוייך למודול M .

הוכחה: יהי $0 \neq x_0 \in M$ כך שהאידאל $P = \text{Ann}(x_0)$ מקסימלי בתוך Σ . יהיו $f, g \in A$. נניח כי $f \cdot g \in P$. אם $f \in P$ סיימנו. אחרת,

$$fx_0 \neq 0$$

לכן $g(fx_0) = 0$. לכן $\text{Ann}(fx_0) \subseteq \text{Ann}(x_0)$, ולכן שווים. g באיבר הימני, ולכן גם בשמאלי וקיבלנו שהאידאל ראשוני. ■

מסקנה 1.3 אם A נתר וכן $M \neq 0$ אזי $\text{Ass}(M) \neq \emptyset$.