

אלגברה ב3

© ארזים

22 בדצמבר 2016

תרגיל בחוג $R = \mathbb{Z}[t]$ יהי $m = (2, t)$ ויהי $q = (4, t)$.

1. הוכיחו כי m מקסימלי.

2. הוכיחו כי q פרימארי.

3. הוכיחו כי $m^2 \subsetneq q \subsetneq m$.

פתרון 1. נגדיר

$$\begin{aligned}\varphi: R &\rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ f &\mapsto f(0) \pmod{2} \\ \ker \varphi &= (2, t)\end{aligned}$$

f כמובן על. לכן $R/(2, t) \cong \mathbb{F}_2$ שדה, ולכן m מקסימלי.

2. יהי $R/q = \mathbb{Z}[t]/(4, t) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. $\bar{2} \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ הוא מחלק אפס היחיד, והוא נילפטוני מסדר 2, ולכן q פרימארי.

3. $4, t \in (2, t)$, $2 \notin (4, t)$ ולכן $q \subsetneq m$. $m^2 = (4, 2t, t^2) \subseteq (4, t)$ וכן $t \notin m^2$, ולכן $m^2 \subsetneq q \subsetneq m$.

תרגיל יהי $\mathbb{K}$ שדה, ויהי $R = \mathbb{K}[x, y, z]$. נגדיר $p_1 = (x, y)$, $p_2 = (x, z)$. יהי $a = p_1 p_2$. נוכיח כי $a = p_1 \cap p_2 \cap m^2$, כאשר $m = (x, y, z)$ מקסימלי, פירוק פרימרי.

פתרון p_1, p_2 ראשוניים, כי המנות בהם הן תחומי שלמות. m מקסימלי שכן המנה בו היא $\mathbb{K}$. m^2 פרימארי כחזקה של מקסימלי. כעת,

$$\begin{aligned}a = p_1 p_2 &= (x^2, xy, xz, yz) \\ p_1 \cap p_2 &= (x, yz) = (x, xy, xz, yz)\end{aligned}$$

כעת נוכל לראות כי

$$p_1 \cap p_2 \setminus p_1 p_2 = \mathbb{K}x - \{0\}$$

וכעת

$$a = p_1 \cap p_2 \cap m^2$$

נראה שהפירוק מינימלי. נראה שהוא מינימלי:

$$\begin{aligned}x &\notin a \subsetneq p_1 \cap p_2 \ni x \\y^2 &\notin a \subsetneq p_1 \cap m^2 \ni y^2 \\z^2 &\notin a \subsetneq p_2 \cap m^2 \ni z^2\end{aligned}$$

לכן זה פירוק פרימרי מינימלי. הראשונים המינימליים המשוייכים לאידאל a הם p_1, p_2 , והראשונים המשוייכים בכלל הם p_1, p_2, m . נרצה לכתוב כעת $a = p_1 \cap p_2 \cap m'$ עבור פרימרי אחר m' . למשל נוכל לקחת $m' = (x^2, y, z)$, שמקיים $m^2 \subseteq m' \subseteq m$, ולכן $\sqrt{m'} = m$, כמו שצריך. את החיתוך של השניים האחרים אי אפשר לשנות, ואפילו אותם אי אפשר להסיר.

תרגיל יהי $X = [0, 1]$ (או כל מרחב האוסדורף קומפקטי אינסופי). יהי $R = C(X)$ חוג הפונקציות הרציפות הממשיות על X .

1. יהי $x \in X$. הוכיחו כי $m_x = \{\varphi \in C(X) \mid \varphi(x) = 0\}$ אידאל מקסימלי.
2. הוכיחו כי כל אידאל מקסימלי של $C(X)$ הוא מהצורה שלעיל.
3. הוכיחו שלאידאל (0) בחוג $C(X)$ אין פירוק פרימרי.

פתרון 1. נגדיר הומומורפיזם

$$\begin{aligned}ev_x : C(X) &\rightarrow \mathbb{R} \\ev_x(\varphi) &= \varphi(x) \\ker(ev_x) &= m_x \\C(x)/m_x &\cong \mathbb{R}\end{aligned}$$

ולכן m_x מקסימלי.

2. יהי m אידאל מקסימלי של $C(X)$. אם $m \not\subseteq m_x$ אזי לכל $x \in X$ קיימת פונקציה $\varphi_x(x) \in m$, $\varphi_x \notin m_x$, ולכן φ_x לא מתאפסת בסביבה של x . בגלל היינה-בורל, קיים כיסוי סופי של X על ידי סביבות של הנקודות $\{x_1, \dots, x_n\}$ עם סביבות $\{V_1, \dots, V_n\}$. לכן, הפונקציה $f = \varphi_{x_1}^2 \dots \varphi_{x_n}^2 \in m$ לא מתאפסת, ולכן הפיכה, בסתירה.

3. נוכיח שכל אידאל פרימרי שייך לאידאל מקסימלי יחיד. יהי $a \triangleleft R$ אידאל. נניח כי $x \neq y, a \subseteq m_x \cap m_y$. בגלל שלקחנו X האוסדורף, קיימות סביבות $V_x \cap V_y = \emptyset$ כך שמתקיים $y \in V_y, x \in V_x$. לכן קיימות פונקציות רציפות $f(X \setminus V_x) = 0, f(x) = 1, g(X \setminus V_y) = 0, g(y) = 1$. לכן

$$f \cdot g(X) = f \cdot g(X \setminus V_x \cup X \setminus V_y) = 0$$

לכן $f \cdot g \in a$, אבל $f \notin a, g^k \notin a$ לכן a לא פרימרי. $q_1, \dots, q_n$ פרימריים. בגלל שקיים x_i עבורו $q_i \subseteq m_{x_i}$, נבחר נקודה $y \neq x_i$ ואז בחיתוך $q_1 \cap \dots \cap q_n$ קיימת f עבורה $f(y) \neq 0$, ולכן החיתוך בוודאות אינו 0.