

אלגברה ב3

© ארזים

15 בדצמבר 2016

1 לוקליזציות

תרגיל יהי A חוג ויהי P אידאל ראשוני בו. הוכיחו כי

$$A_P/P_P \cong K(A/P)$$

כאשר K הוא (פונקטור) שדה שברים.

פתרון

$$S = A \setminus P$$
$$S^{-1}(A/P) \cong S^{-1}A/S^{-1}P$$

נסמן

$$\pi : A \rightarrow A/P$$

לכן

$$\pi(S)^{-1}(A/P) \cong S^{-1}(A/P)$$

כמובן

$$\pi(S) = A/P \setminus \{0\}$$

לכן

$$\pi(S)^{-1}(A/P) = K(A/P)$$

תרגיל (הלמה של סר) יהי A חוג ויהיו $(f_1, \dots, f_n) = A$. נקרא לסדרה סופית כזו פירוק יחידה. יהי M מודול מעל A . נסמן

$$S_i = \{1, f_i, f_i^2, \dots\}$$

$$M_{f_i} = S_i^{-1}M$$

נסתכל בסדרה

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} M_{f_i}$$

הוכיחו כי φ חד־חד־ערכי כאשר

$$\varphi(m) = \left(\frac{m}{1}\right)_i$$

פתרון יהי $m \in M$ עם

$$\varphi(m) = \left(\frac{m}{1}, \dots, \frac{m}{1}\right) = 0$$

לכל i קיים N_i כך שמתקיים

$$f_i^{N_i} m = 0$$

ניקח $N = \max N_i$. כעת

$$f_i^N m = 0$$

לכל i . בגלל שמתקיים

$$(f_1, \dots, f_n) = A$$

אזי גם

$$(f_1, \dots, f_n)^{nN} = A$$

אזי ניתן לרשום את 1 כסכום של מכפלות ובכל מכפלה מופיע לפחות פעם אחת f_i^N כלשהו, כלומר

$$Am = 0$$

$$m = 0$$

הוכחה אלטרנטיבית: לכל אידאל P ראשוני של A קיים $i(p)$ כך שמתקיים

$$f_{i(p)} \notin P$$

ההעתקה $\psi: M \rightarrow \bigoplus M_P$, על פני כל הראשוניים P היא חד-חד ערכית, כי ראינו שאיבר מתאפס אם ורק אם הוא מתאפס בכל לוקליזציה. כעת בגלל ההעתקה

$$g: \bigoplus M_{f_i} \rightarrow \bigoplus M_P$$

$$g\left(\frac{m_i}{f_i^{n_i}}\right)_i = \left(\frac{m_{i(p)}}{f_{i(p)}^{n_{i(p)}}}\right)_P$$

שמקיימת $\psi \circ \varphi = g$, חייבת להיות חד-חד-ערכית.

תרגיל (לבית)

$$0 \rightarrow M \rightarrow \bigoplus_i M_{f_i} \rightarrow \bigoplus_{(i,j), i \neq j} M_{f_i f_j} \rightarrow \bigoplus_{i,j,k} M_{f_i f_j f_k} \rightarrow \dots$$

וכן הלאה. הוכיחו שזו סדרה מדויקת.

תרגיל תהי B אלגברה שטוחה מעל A על ידי ההומומורפיזם $f: A \rightarrow B$. לכל אידאל a של A נגדיר $a^e = Bf(a)$, ולכל אידאל b של B נגדיר $b^c = f^{-1}(b) \cap A$. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים.

1. לכל אידאל $a \triangleleft A$ מתקיים $a^{ec} = a$.
2. העתקה $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ על ידי $p \rightarrow p^c$ היא על.
3. לכל אידאל m מקסימלי של A מתקיים $m^e \neq (1)$.
4. לכל מודול M מעל A שאינו 0 , $M_B \neq 0$.
5. לכל מודול M מעל A , ההעתקה $m \rightarrow 1 \otimes_A m$ היא חד-חד-ערכית.

במקרה זה נאמר כי B שטוחה באופן נאמן מעל A .

פתרון $1 \Rightarrow 2$: טריוויאלי - לכל p אידאל ראשוני של A נקבל $p^{ec} = p$.
 $2 \Rightarrow 3$: יהי m אידאל מקסימלי של A . אזי קיים אידאל ראשוני n של B עבורו $n^c = m$ ואז

$$m^e \subseteq nc^e \subseteq n \subsetneq B$$

$3 \Rightarrow 4$: יהי $M \neq 0$ כך שמתקיים $M_B = 0$ (בשלילה). לכל $M' \subseteq M$ מתקיים $M'_B \subseteq M_B = 0$ ולכן $M'_B = 0$. לכן מספיק להוכיח עבור מודולים ציקליים. נניח כי $M = A/a$ אזי

$$M_B = B/a^e$$

לכן $a^e = B$, כלומר $a = A$, כי אחרת יש m מקסימלי של A שמכיל את a , בסתירה לסעיף 3.
 $4 \Rightarrow 5, 5 \Rightarrow 1$: שיעורי בית.

הגדרה 1.1 יהי M מודול מעל A . M נקרא ציקלי אם קיים $m \in M$ כך שמתקיים $\langle m \rangle = M$. אם $\langle m \rangle = M$, אזי $M \cong A/a$, עבור $a = \text{Ann}(m)$.

תרגיל יהי A חוג. יהי M מודול מעל A . נגדיר את התומך של M :

$$\text{supp}(M) \subseteq \text{Spec}(A)$$

אידאל ראשוני P שייך לתומך אם ורק אם $M_P \neq 0$. ניזכר שאנחנו יודעים שמתקיים $\text{Supp}(M) = \emptyset$ אם ורק אם $M = 0$.

1. יהי a אידאל של A . נסמן $V(a) \subseteq \text{Spec}(A)$ - קבוצת כל האידאלים הראשוניים שמכילים את a . הוכיחו כי $\text{Supp}(A/a) = V(a)$.
2. אם $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ סידרה מדויקת אזי

$$\text{Supp}(M) = \text{Supp}(M') \cup \text{Supp}(M'')$$

הוכחה:

1. $S^{-1}A = S^{-1}a$ אם ורק אם $S \cap a = \emptyset$, ולכן נסיים - $S = A \setminus P$, ולכן $S^{-1}(A/a) = 0 \iff S^{-1}a = S^{-1}A = S^{-1}a \iff S \cap P = \emptyset \iff a \subseteq P$

2. יהי P אידאל ראשוני. אזי

$$0 \rightarrow M'_P \rightarrow M_P \rightarrow M''_P \rightarrow 0$$

זו סדרה מדויקת. אם $p \notin \text{Supp}(M') \cup \text{Supp}(M'')$ אזי מהדיוק נובע $p \notin \text{Supp}(M)$. אם $p \in \text{Supp}(M)$ אז שוב מהדיוק נקבל את השייכות השנייה.

■