

אלגברה ב3

© ארזים

8 בדצמבר 2016

1 לוקליזציה

יהי A חוג. $S \subseteq A$ תהי קבוצה כפלית (מכילה את היחידה וסגורה לכפל). הגדרנו את $S^{-1}A$ - חוג השברים. זוהי A אלגברה שטוחה, כלומר טנזור איתה שומר דיוק. בהנתן חוג A נתבונן בספקטרום $\text{Spec}(A)$, קבוצת האידאלים הראשוניים של A , ובספקטרום המקסימלי, $\text{mSpec}(A)$, קבוצת האידאלים המקסימליים של A . בהינתן M מודול מעל A , נוכל להתאים בין כל אידאל ראשוני P למודול M_P מעל A_P . כמו כן, אם $M_P = 0$ לכל P אזי $M = 0$. טוב עוד יותר - אם M מודול נוצר סופית מעל A , נוכל להתאים בין כל אידאל מקסימלי לבין המרחב הווקטורי $M_m/m_m M_m$ מעל השדה

$$M_m/m_m \cong A/m = \mathbb{K}(m)$$

תרגיל יהי N מודול נוצר סופית מעל A . הוכיחו כי אם $N_m/m_m N_m = 0$ לכל אידאל מקסימלי m של A , אזי $N = 0$.

פתרון אם $0 = N_m/m_m N_m$ אזי $N_m = m_m N_m$, ולכן לפי נאקאימה $N_m = 0$ לכל m מקסימלי. לכן $N = 0$.

תרגיל יהי $f : A \rightarrow B$ הומומורפיזם של חוגים. תהי $S \subseteq A$ קבוצה כפלית. נסמן $T = f(S)$ (שהיא קבוצה כפלית). אזי B הוא מודול מעל A , $S^{-1}B$ הוא $S^{-1}A$ מודול, וגם $T^{-1}B$ הוא $S^{-1}A$ מודול - עד כאן הכל טריוויאלי - אבל גם

$$S^{-1}B \cong T^{-1}B$$

פתרון

$$\varphi : S^{-1}B \rightarrow T^{-1}B$$

$$\varphi\left(\frac{b}{s}\right) = \frac{b}{\varphi(s)}$$

אם זה מוגדר היטב אז זה על. $\frac{b_1}{s_1} = \frac{b_2}{s_2}$ אם ורק אם קיים $s \in S$ עבורו $f(s)(f(s_2)b_1 - f(s_1)b_2) = 0$, אם ורק אם $s(b_1s_2 - b_2s_1) = 0$, אם ורק אם $\frac{b_1}{f(s_1)} = \frac{b_2}{f(s_1)}$. לכן מוגדרת היטב וחד-חד-ערכית, ולכן סיימנו.

הגדרה 1.1 יהי A תחום שלמות ויהי M מודול מעל A . $m \in M$ נקרא מפותל אם קיים $a \in A$ $a \neq 0$ עבורו $am = 0$. נגדיר

$$T(M) = \{m \in M \mid \exists a \neq 0. am = 0\} = \{m \in M \mid \text{Ann}_A(m) \neq 0\}$$

תרגיל הוכיחו כי $T(M) \leq M$.

פתרון יהי $m \in T(M)$, ויהי $b \in A$. אזי קיים $a \neq 0$ עבורו $am = 0$ ואז $a(bm) = 0$, ולכן $bm \in T(M)$. אם $n \in T(M)$ קיים $c \neq 0$ כך שמתקיים $c \cdot n = 0$, ואז

$$ca(n+m) = 0$$

השתמשנו בכך שמתקיים $ca \neq 0$ כי אחנו בתחום שלמות. לכן $n+m \in T(M)$ ולכן $T(M) \leq M$.

תרגיל (לבית) $T(M/T(M)) = 0$.

תרגיל (לבית) אם

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

סדרה מדויקת, אזי

$$0 \rightarrow T(M') \rightarrow T(M) \rightarrow T(M'') \rightarrow 0$$

סדרה מדויקת (הפונקציות הן פשוט צמצום).

תרגיל $T(M)$ הוא הגרעין של

$$f: M \rightarrow S^{-1}(M)$$

כאשר $S = A \setminus \{0\}$.

פתרון נסמן

$$S^{-1}A = \mathbb{K}(A)$$

זהו שדה שברים. אם $m \in \ker f$ אזי $0 = \frac{m}{1}$, כלומר קיים $s \in S = A \setminus \{0\}$ כך שמתקיים $sm = 0$, ולכן $m \in T(M)$. להיפך באותה צורה.

מסקנה 1.2 יהי M מודול מעל A , כאשר A תחום שלמות. אזי הבאים שקולים:

1. M חסר פיתול ($T(M) = 0$).

2. M_P חסר פיתול לכל אידאל ראשוני P $(T(M))_P = T(M_P)$.

3. M_m חסר פיתול לכל אידאל מקסימלי m $(T(M))_m = T(M_m)$.

נראה כי

$$S^{-1}M \supseteq T(S^{-1}M) = S^{-1}T(M) \subseteq S^{-1}M$$

כי $S^{-1}A \otimes_A M$ מדויק. $\frac{m}{s} \in S^{-1}T(M)$ אזי קיים $a \neq 0$ עבורו $am = 0$ ואז

$$a \left(\frac{m}{s} \right) = 0$$

כלומר $\frac{m}{s} \in T(S^{-1}M)$ יהי $\frac{x}{s} \in T(S^{-1}M)$ אזי קיים $\frac{a}{t} \neq 0$ עבורו $\frac{ax}{st} = 0$ אזי קיים $s' \in S$ עבורו $s'ax = 0$ ואז $x \in T(M)$ ולכן $\frac{x}{s} \in S^{-1}T(M)$ וסיימנו את ההכלה הדו־כיוונית.

תרגיל יהי M מודול מעל A ויהי $a \triangleleft A$ אידאל. נניח כי $M_m = 0$ לכל אידאל מקסימלי m שמכיל את a . אזי $M = aM$.

פתרון נתבונן במנה

$$N = M/aM$$

נרצה להראות $N = 0$. יהי $m \triangleleft A$, $a \subseteq m$ מקסימלי. אזי $m/a \triangleleft A/a$ אידאל מקסימלי. ידוע כי $N_m = 0$ לכל $m \triangleleft A$. בגלל הפונקציה $f : A \rightarrow A/a$ של המנה באידאל a , ובגלל תרגיל קודם שראינו היום, מתקיים $N_m \cong N_{(m/a)} = 0$ ולכן $N_n = 0$ לכל אידאל מקסימלי $n \triangleleft A/a$ ולכן $N = 0$.