

אלגברה ב3

© ארזים

1 בדצמבר 2016

1 פיתול, שטיחות ומכפלה טנזורית של אלגבראות

1.1 פיתול

הגדרה 1.1 יהי M מודול מעל חוג R . נסמן

$$\text{Tor}(M) = \{m \in M \mid \exists r \neq 0, rm = 0\} \subseteq M$$

תכונות

1. $\text{Tor}(M) < M$.

2. נאמר כי M הוא מודול פיתול אם $\text{Tor}(M) = M$. נאמר כי M הוא מודול חסר פיתול אם $\text{Tor}(M) = 0$.

3. המודול $M/\text{Tor}(M)$ חסר פיתול.

4. נניח כי $R = \mathbb{Z}$, אזי המודולים הם פשוט חבורות אבליות. אם M מודול נוצר סופית מעל $\mathbb{Z}$, אזי

$$M = \mathbb{Z}^r \oplus \text{Tor}(M)$$

פירוק זה לא קנוני (כלומר האיזומורפיזם לא קנוני).

תרגיל יהי M מודול שטוח מעל תחום שלמות R . אזי M חסר פיתול.

פתרון נניח בשלילה שקיים פיתול. יהי $m \neq 0$ וכן $r \neq 0$ עבורם $rm = 0$. אזי

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\times r} R \rightarrow R/(r) \rightarrow 0$$

סדרה קצרה מדוייקת, ואז

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\times r} M$$

אבל $0 \neq m \in \ker(\times r)$, כלומר M אינו מודול מדוייק.

תרגיל נניח כי $R = \mathbb{Z}$. יהי A מודול מעל R . אזי A מודול פיתול אם ורק אם $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

פתרון נניח כי A מודול פיתול, אזי $\text{Tor}(A) = A$, כלומר לכל $a \in A$ קיים $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ עבורו $na = 0$. כעת $a \otimes \frac{q}{n} = na \otimes \frac{q}{n} = 0$. לכן $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$, כי הוא נוצר על ידי טנזורים טהורים, שכולם 0. בכיוון השני, נניח כי המכפלה הטנזורית מתאפסת. אם A נוצר סופית, אזי $A \cong \mathbb{Z}^r \oplus \text{Tor}(A)$ ואז

$$A \otimes \mathbb{Q} \cong (\mathbb{Z}^r \oplus \text{Tor}(A)) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Z}^r \otimes \mathbb{Q} \oplus \text{Tor}(A) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^r$$

לכן נובע כי $r = 0$, ולכן $A = \text{Tor}(A)$. ונראה כי $a \in A$, $a \in \text{Tor}(A)$ כמובן $a \otimes 1 = 0$. אזי קיים תת מודול $A_0 \subseteq A$, כאשר $a \in A_0$ נוצר סופית, כך שמתקיים

$$0 = a \otimes 1 \in A_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

ולכן מהמקרה הנוצר סופית סיימנו.

1.2 סדרת תרגילים על מכפלה טנזורית של אלגבראות

"אני עושה תזכורת. אם אתם לא צריכים את זה תגידו לי, ואני אעשה בכל זאת - זה בשבילי." -המתרגל

יהיו A, B אלגבראות מעל חוג K . אזי על $A \otimes_K B$ קיים מבנה טבעי של אלגברה מעל K :

$$(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

$$k(a \otimes b) = ka \otimes b = a \otimes kb$$

תרגיל הוכיחו:

1. תהי A אלגברה מעל K . קיים איזומורפיזם טבעי

$$\psi : K[x_1, \dots, x_n] \otimes A \rightarrow A[x_1, \dots, x_n]$$

2. תהי R אלגברה מעל K , ויהי $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$. קיים איזומורפיזם טבעי

$$\psi : (K[x_1, \dots, x_n] / I) \otimes_K R \cong R[x_1, \dots, x_n] / R[x_1, \dots, x_n] I$$

3.

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$$

פתרון

1. נוכיח רק עבור $n = 1$. כל איבר של $K[x] \otimes A$ ניתן לרשום באופן יחיד בתור

$$\sum_{i=1}^n x^i \otimes a_i$$

שכן מתקיים

$$K[x] \cong \bigoplus_{i=0}^{\infty} A$$

ואז

$$A \otimes_K K[x] \cong A \otimes_K \left(\bigoplus_{i=0}^{\infty} K \right) \cong \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$$

כעת נגדיר

$$\psi \left(\sum_{i=0}^n x^i \otimes a_i \right) = \sum a_i x^i$$

וברור שזה חד־חד־ערכי ועל.

2. ניקח את הסדרה

$$I \rightarrow K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K[x_1, \dots, x_n]/I \rightarrow 0$$

נטנזר עם R :

$$R \otimes_K I \rightarrow R \otimes_K K[x_1, \dots, x_n] \rightarrow K[x_1, \dots, x_n]/I \otimes_K R$$

וכאן $R \otimes_K K[x_1, \dots, x_n] = R[x_1, \dots, x_n]$ מסעיף 1. לכן נסיים.

3. כמובן,

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$$

ולכן

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\cong (\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}[x]/(x + i)(x - i) \cong \\ &\cong \mathbb{C}[x]/(x + i) \oplus \mathbb{C}[x]/(x - i) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \end{aligned}$$

תרגיל תהי L/K הרחבת גלואה סופית, ותהי $G = \text{Gal}(L/K)$.

$$L \otimes_K L \cong \bigoplus_{i=1}^{|G|} L$$

פתרון $L = K(\alpha)$, כאשר $p(x)$ הפולינום המינימלי של α . כמו כן $p(x) = (x - l_1) \dots (x - l_n)$ מעל L , אבל אי פריק מעל K .

$$L \otimes_K L \cong \bigoplus_{i=1}^n L[x] / (x - l_i)$$