

אלגברה ב3

© ארזים

24 בנובמבר 2016

תרגיל יהיו m, n שלמים זרים. חשבו את

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

פתרון יוצא 0. ניקח $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x \otimes y &= 1 \cdot (x \otimes y) = (\alpha n + \beta m)(x \otimes y) = \alpha n(x \otimes y) + \beta m(x \otimes y) = \\ &= (\alpha n x \otimes y) + (x \otimes \beta m y) = (0 \otimes y) + (x \otimes 0) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

פתרון אלטרנטיבי: נתבונן בסדרה המדויקת מימין

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{xn} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

נוכל לקחת טנזור ולקבל

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow 0 \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\xrightarrow[\sim]{xn} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

כדי לשמור דיוק, משום שההעתקה xn חד חד ערכית ועל, המודול השלישי חייב להיות 0.

תרגיל חשבו את

$$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

פתרון

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{p^2\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

ניקח טנזור

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0 \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\xrightarrow[p^2x]{0} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0\end{aligned}$$

כדי לשמור דיוק, היות וההעתקה p^2x היא העתקת האפס, ההעתקה הבאה חייבת להיות איזומורפיזם. לכן

$$\mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

תרגיל חשבו מאוד: הוכיחו כי לכל R חוג ולכל M מודול מעל R ההעתקה

$$\begin{aligned}f : R \otimes_R M &\rightarrow M \\ f : r \otimes m &\rightarrow rm\end{aligned}$$

היא איזומורפיזם של חוגים.

פתרון זה כמובן הומומורפיזם. ההופכי הוא $\psi : m \rightarrow 1 \otimes m$. אכן

$$\begin{aligned}f\psi(m) &= f(1 \otimes m) = m \\ \psi f(r \otimes m) &= \psi(rm) = 1 \otimes rm = r \otimes m\end{aligned}$$

ראינו בשיעור כי

$$N \otimes (M_1 \otimes M_2) \cong (N \otimes M_1) \oplus (N \otimes M_2)$$

ואפשר להסביר זאת על ידי

$$\begin{aligned}M_1 &\rightarrow M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_2 \rightarrow 0 \\ M_2 &\rightarrow M_1 \oplus M_2 \rightarrow M_1 \rightarrow 0\end{aligned}$$

וניקח טנזור

$$\begin{aligned}N \otimes M_1 &\rightarrow N \otimes (M_1 \oplus M_2) \rightarrow N \otimes M_2 \rightarrow 0 \\ N \otimes M_2 &\rightarrow N \otimes (M_1 \oplus M_2) \rightarrow N \otimes M_1 \rightarrow 0\end{aligned}$$

ולכן נובע כי

$$N \otimes (M_1 \otimes M_2) \cong (N \otimes M_1) \oplus (N \otimes M_2)$$

הערה 0.1 נניח שצריך לחשב את $M \otimes_R N$. נוכל לקחת

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_J R & \twoheadrightarrow & \bigoplus_I R \twoheadrightarrow M \\ \bigoplus_J N & \twoheadrightarrow & \bigoplus_I N \twoheadrightarrow M \otimes_R N \end{array}$$

על ידי טנזור. כמובן, I, J גדולים מספיק.

תרגיל (לפי המתרגל, תרגיל מוזר) יהי R חוג ויהי a אידאל. יהיו M, N מודולים מעל R/a (כלומר M, N מודולים מעל R עם $\text{Ann}(M), \text{Ann}(N) \subseteq a$). אזי

$$M \otimes_{R/a} N \xleftarrow{\sim} M \otimes_R N$$

פתרון ההעתקות הן

$$m \otimes_{R/a} n \leftrightarrow m \otimes_R n$$

תרגיל חשבו את

$$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

(שוב)

פתרון $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ הם מודולים מעל $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$. לכן

$$\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

הערה יהי $\mathbb{K}$ שדה, ויהי V, W מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{K}$. אם $\{e_i\}$ בסיס של V , $\{f_i\}$ בסיס של W , אזי $\{f_i \otimes e_j\}$ בסיס של $V \otimes_{\mathbb{K}} W$. בפרט אם $V \otimes_{\mathbb{K}} W = 0$ אזי $V = 0$ או $W = 0$.

תרגיל (לפי המתרגל, תרגיל חשוב) יהי (R, m) חוג מקומי. יהיו M, N מודולים נוצרים סופית מעל R . הוכיחו שאם $M \otimes_R N = 0$ אזי $M = 0$ או $N = 0$.

פתרון

$$0 = R/m \otimes_R (M \otimes_R N) \otimes_R R/m = (R/m \otimes_R M) \otimes_R (N \otimes_R R/m)$$

כעת, $R/m \otimes_R M \cong M/mM$. מדוע? נתבונן בסדרה הבאה ונטנזר אותה:

$$m \rightarrow R \rightarrow R/m \rightarrow 0$$

לאחר טנזור

$$\begin{array}{ccccccc} m \otimes_R M & \rightarrow & R \otimes_R M & \rightarrow & R/m \otimes_R M & \rightarrow & 0 \\ mM & \rightarrow & M & \rightarrow & R/m & \rightarrow & 0 \end{array}$$

כעת

$$0 = M/mM \otimes_R N/mN$$

אבל אלה שניהם מודולים מעל R/m - שהוא שדה, ולכן הן מרחבים ווקטוריים מעליו, ולכן אחד מהם מתאפס. מנאקאיימה, אחד המודולים הוא 0.

טענה 0.2 יהי R חוג, $a < R$ אידאל ויהי M מודול מעל R אזי

$$R/a \otimes_R M \cong M/aM$$

הוכחה: ראינו לפני רגע.

■