

## אלגברה ב3

© ארזים

17 בנובמבר 2016

### 1 מודולים

**משפט 1.1** (גרסה של הלמה של נאקאימה) יהי  $R$  חוג, ויהי  $M$  מודול נוצר סופית מעל  $R$ . יהי  $J \triangleleft R$  אידאל עבורו  $JM = M$ . אזי  $(1 + J) \cap \text{Ann}(M) \neq \emptyset$ .

**מסקנה 1.2** יהי  $A$  חוג מקומי עם אידאל מקסימלי  $m$ , ויהי  $M$  מודול נוצר סופית מעל  $A$ . אזי  $M = 0$  אם ורק אם  $M/mM = 0$  (זהו מרחב ווקטורי מעל השדה  $A/m$ ).

**תרגיל** יהי  $M$  מודול נוצר סופית מעל חוג  $R$ , ויהי  $J \triangleleft R$  כך שמתקיים  $JM = M$ . אזי קיים  $j \in J$  כך שמתקיים  $jm = m$  לכל  $m \in M$ .

**פתרון** יהי  $1 + j_0 \in \text{Ann}(M)$ , אזי לכל  $m \in M$  מתקיים  $(1 + j_0)m = 0$ , ואם נסמן  $j = -j_0$ , אז לכל  $m \in M$  מתקיים  $jm = m$ .

**תרגיל** יהי  $K$  חוג, ויהי  $M$  מודול נוצר סופית מעל  $K$ . יהי  $f : M \rightarrow M$  אפימורפיזם של מודולים מעל  $K$ . הוכיחו כי  $f$  הוא איזומורפיזם.

**פתרון** יהי  $R = K[x]$ . נגדיר על  $M$  מבנה של מודול מעל  $R$  על ידי

$$x \cdot m = f(m)$$

כיוון שההעתקה  $f$  על, מתקיים  $IM = M$  עבור  $I = (x) \triangleleft R$ . לכן קיים  $g \in I$  כך שמתקיים  $gm = m$  לכל  $m \in M$ . כעת,  $g = qx$ , ואז  $q(f)$  היא ההופכית של  $f$ :

$$q(f) \cdot f = g(f) = 1$$

ולכן  $f$  איזומורפיזם.

**דוגמא** אם  $K$  שדה אזי  $M$  מרחב ווקטורי סוף מימדי, ואז אנחנו מכירים את הטענה מאלגברה לינארית. לעומת זאת, אם לא דורשים נוצרות סופית, ניקח  $R^\infty$  ונתבונן בהעתקה  $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \mapsto (a_2, \dots, a_n, \dots)$  - היא על ולא חד-חד-ערכית.

## 2 סדרות מדויקות

**הגדרה 2.1** יהיו  $M, M_1, M_2$  מודולים מעל  $R$ , ותהי  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$  סדרה קצרה מדויקת. נאמר שהיא מתפצלת אם קיימת  $\varphi : M \rightarrow M_1 \oplus M_2$  איזומורפיזם כך שהדיאגרמה הבאה מתחלפת:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & M & \rightarrow & M_2 \rightarrow 0 \\ & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ 0 & \rightarrow & M_1 & \rightarrow & M_1 \oplus M_2 & \rightarrow & M_2 \rightarrow 0 \end{array}$$

המעבר באמצע הוא על ידי  $\varphi$  כמובן, המעברים האחרים באמצע הם זהות.

**דוגמא** סדרה לא מתפצלת - יהי  $p$  ראשוני.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

משפט השאריות הסיני מבטיח כי זו לא סדרה מתפצלת.

**תרגיל** תהי  $0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M_2 \rightarrow 0$  סדרה קצרה מדויקת. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

1. הסדרה מתפצלת.

2. קיים הומומורפיזם  $\alpha : M \rightarrow M_1$  המקיים  $\alpha \circ i = \text{Id}_{M_1}$ .

3. קיים הומומורפיזם  $\beta : M_2 \rightarrow M$  המקיים  $\pi \circ \beta = \text{Id}_{M_2}$ .

**תרגיל**  $2, 3 \Rightarrow 1$  קל - מגדירים  $\alpha(m_1, m_2) = m_1, \beta(m_2) = (0, m_2)$  כעת נראה  $1 \Rightarrow 2$ , והכיוון הנותר דומה ונשאר כתרגיל בית. נגדיר הומומורפיזם

$$\begin{aligned} \varphi : M &\rightarrow M_1 \oplus M_2 \\ \varphi(m) &= (\alpha(m), \pi(m)) \end{aligned}$$

נבדוק שהכל מתחלף:

$$\begin{aligned} m_1 \xrightarrow{i} i(m_1) \xrightarrow{\varphi} (\alpha i(m_1), \pi i(m_1)) &= (m_1, 0) \\ m \xrightarrow{\varphi} (\alpha(m), \pi(m)) \xrightarrow{\pi} \pi(m) \end{aligned}$$

נוכיח כי  $\varphi$  חד-חד-ערכי ועל. נראה חד-חד-ערכיות, על המתרגל לא מצליח כרגע.

$$0 = \varphi(m) = (\alpha(m), \pi(m)) = (0, 0)$$

כעת  $\pi(m) = 0$ , ולכן  $m = i(m_1)$ , אבל  $0 = m = i(m_1) = \alpha(i(m_1)) = 0$ , ולכן  $\varphi$  חד-חד-ערכית.

**תרגיל** יהיו  $M_1, M_2$  מודולים מעל  $R$ . הוכיחו כי  $M_1, M_2$  נוצרים סופית אם ורק אם  $M = M_1 \oplus M_2$  נוצר סופית.

**פתרון** אם  $M_1, M_2$  נוצרים סופית על ידי  $m_1, \dots, m_n, m'_1, \dots, m'_k$ , אזי  $M$  נוצר על ידי כל אלה. אם  $M$  נוצר סופית, הרי ההטלה לכל קואורדינטה היא על, ולכן  $M_1, M_2$  נוצרים סופית.

**הערה 2.2** אם  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$  סדרה קצרה מדויקת, אז אם  $M_1, M_2$  נוצרים סופית, גם  $M$ . אבל אם  $M$  נוצר סופית אזי  $M_2$  נוצר סופית, אבל  $M_1$  לאו דווקא.

**דוגמא** תת מודול לא נוצר סופית של מודול נוצר סופית. יהי  $R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, \dots]$  נגדיר  $\sigma = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ . אזי  $R$  נוצר סופית מעל עצמו, וכן  $\mathbb{K}$ , אבל  $\sigma$  לא, ועדיין יש סדרה קצרה מדויקת:

$$0 \rightarrow \sigma \rightarrow R \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow 0$$

**תרגיל** יהי  $M$  מודול נוצר סופית מעל  $R$ . יהי  $\varphi : M \rightarrow R^n$  אפימורפיזם. הוכיחו כי  $\ker \varphi$  נוצר סופית.

**פתרון** נגדיר  $e_i$  להיות "בסיס סטנדרטי" של  $R^n$  (1 במקום  $i$  ואפס בכל מקום אחר). יהי  $m_i$  לכל  $1 \leq i \leq n$  כך שמתקיים  $\varphi(m_i) = e_i$ . נגדיר

$$\beta : R^n \rightarrow M$$

על ידי  $\beta(e_i) = m_i$  לכל  $1 \leq i \leq n$ . זה הומומורפיזם כי  $R^n$  מודול חופשי. לכן

$$0 \rightarrow \ker \varphi \rightarrow M \rightarrow R^n \rightarrow 0$$

מתפצלת, ולכן  $M \cong \ker \varphi \oplus R^n$ . לכן  $\ker \varphi$  נוצר סופית.