

אלגברה ב3

© ארזים

10 בנובמבר 2016

תרגיל יהי $m \in \mathbb{Z}$. חשבו את $\sqrt{(m)}$.

פתרון נכתוב

$$m = \pm p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$$

נרצה להראות כי

$$\sqrt{(m)} = (p_1) \dots (p_n)$$

נראה זאת בשתי דרכים.
בדרך הראשונה, $x \in \sqrt{(m)}$ אם ורק אם קיים N עבורו $x^N \in (m)$. כלומר $x^N | m$, ולכן $x^N | p_i^{r_i}$ ומשום שהם ראשוניים מתקיים $p_i | x$, כלומר $x \in (p_1) \dots (p_n)$. לכן יש לנו הכלה בכיוון אחד.
בכיוון השני, אם $x \in (p_1) \dots (p_n)$, אזי $x^{\max\{r_i\}} \in (m)$, ולכן $x \in \sqrt{(m)}$, וקיבלנו את ההכלה בכיוון השני.
כעת, עבור הדרך השנייה, נכתוב

$$\begin{aligned}(m) &= (p_1^{r_1}) \dots (p_n^{r_n}) \\ \sqrt{(m)} &= \sqrt{(p_1^{r_1}) \dots (p_n^{r_n})} = \sqrt{(p_1)^{r_1}} \dots \sqrt{(p_n)^{r_n}} = \sqrt{(p_1)^{r_1}} \cap \dots \cap \sqrt{(p_n)^{r_n}} = \\ &= (p_1) \cap \dots \cap (p_n) = (p_1) \dots (p_n)\end{aligned}$$

תרגיל (תכונה אוניברסלית של חוג הפולינומים) יהיו K, A חוגים, ויהי $i : K \rightarrow A$ הומומורפיזם. נגדיר

$$R = K[x_1, \dots, x_n]$$

יהיו $a_1, \dots, a_n$. הוכיחו כי קיים יחיד הומומורפיזם

$$\varphi = ev_{\{a_1, \dots, a_n\}} : R \rightarrow A$$

כך שמתקיים:

1.

$$\begin{aligned}\varphi(k) &= i(k) \\ \varphi(x_i) &= a_i\end{aligned}$$

2. נניח כי $K = \mathbb{K}$ שדה, $A = K$, $i = \text{Id}_{\mathbb{K}}$ אזי

$$m = \ker \varphi \triangleleft R$$

הוא אידאל מקסימלי

הערה 0.1 אם $\mathbb{K}$ סגור אלגברית, אז אלה כל האידאלים המקסימליים של R - משפט זה נקרא משפט האפסים של הילברט.

3. נניח כי $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ בסיטואציה של סעיף 2. מצאו אידאל מקסימלי שלא מהצורה של סעיף 2.

פתרון

1. נגדיר

$$\varphi\left(\sum k_{r_1, \dots, r_n} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n}\right) = \sum i(k_{r_1, \dots, r_n}) a_1^{r_1} \dots a_n^{r_n}$$

2. ממשפט האיזומורפיזם הראשון,

$$R/m \cong \mathbb{K}$$

ולכן m מקסימלי.

3. נשים לב כי

$$\mathbb{R}[x] / (x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$$

לכן זהו אידאל מקסימלי שאינו מהצורה של סעיף 2.

תרגיל יהי R חוג, נסמן בתור $R[[x]]$ חוג הטורים הפורמליים עם מקדמים מתוך R .

$$\begin{aligned}f &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \\ f + g &= \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \\ f \cdot g &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) x^k\end{aligned}$$

זהו חוג קומוטטיבי. האם $1 - x$ הפיך בחוג $R[[x]]$?

פתרון כן.

$$(1-x)(1+x+\dots+x^n+\dots)=1$$

תרגיל יהי K חוג, ויהי $R = K[x]$. יהי $f = a_0 + \dots + a_n x^n$.

1. $f \in \mathcal{N}(R)$ אם ורק אם $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{N}(K)$.
2. $f \in R^\times$ אם ורק אם $a_0 \in K^\times$ וכן $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{N}(K)$.
3. הוכיחו כי $\mathcal{N}(R) = J(R)$.

פתרון

1. נניח כי $a_0, \dots, a_n$ נילפוטנטיים, ואז $a_0, a_1 x, \dots, a_n x^n$ נילפוטנטיים. לכן f נילפוטנטי כסכום של נילפוטנטיים.
נניח כי f נילפוטנטי. יהי n עבורו $f^n = 0$. המקדם החופשי של f^n הוא a_0^n , ולכן a_0 נילפוטנטי. כעת נתובנן בפולינום $f_1 = f - a_0$, ונמשיך באינדוקציה, ונקבל את הטענה.
2. אם a_0 הפיך וכן $a_1, \dots, a_n$ נילפוטנטיים. אזי $a_1 x + \dots + a_n x^n$ נילפוטנטי, a_0 הפיך גם בתוך R , ואז f הוא סכום של נילפוטנטי והפיך - כלומר הפיך.
אם f הפיך, קיים $g = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$ עבורו $fg = 1$. האיבר החופשי הוא $a_0 b_0$, ולכן a_0 הפיך. המשך ההוכחה - המתרגל לא הצליח להוכיח בכיתה, התחייב לחזור עם הוכחה, בינתיים מניחים שזה נכון.
3. ידוע כי $\mathcal{N}(R) \subseteq J(R)$. יהי $f \in J(R)$. כעת, לכל $g \in R$, $1 - fg$ הפיך. נבחר $g = x$, ונקבל כי $1 - fx$ הפיך. לכן fx נילפוטנטי, ולכן, מסעיף 1, מקדמיו כולם נילפוטנטיים - אבל מקדמיו הם בדיוק מקדמיו של f , ולכן גם הוא נילפוטנטי. כך הוכחנו את הכיוון השני.

תרגיל יהי R חוג, $x \in R$. הוכיחו כי:

1. $x \in R^\times$ אם ורק אם לכל $\varphi : R \rightarrow \mathbb{K}$ הומומורפיזם, באשר $\mathbb{K}$ שדה כלשהו, מתקיים $\varphi(x) \neq 0$.
2. $x \in \sqrt{0}$ אם ורק אם לכל $\varphi : R \rightarrow \mathbb{K}$ הומומורפיזם, באשר $\mathbb{K}$ שדה כלשהו, מתקיים $\varphi(x) = 0$.

פתרון

1. אם x הפיך, $\varphi : R \rightarrow \mathbb{K}$ הומומורפיזם, אזי $\varphi(x) \in \mathbb{K}^\times$, אזי $\varphi(x) \neq 0$.
אם x לא הפיך, אזי קיים אידאל מקסימלי m המכיל את x , ואז $\pi : R \rightarrow R/m$ מקיים $\pi(x) = 0$.
2. נשאר כתרגיל מפאת קוצר הזמן.