

אלגברה ב2

© ארזים

23 במאי 2017

תרגיל חשבו את $\text{Gal}(x^3+x+3/\mathbb{Q})$.

פתרון הפולינום אי פריק מקריטריון השורש הרציונלי - אין לו שורש. לכן, חבורת גלואה שלו היא תת חבורה של S_3 , שהיא טרנזיטיבית. מכאן נובע כי

$$\text{Gal}(x^3+x+3/\mathbb{Q}) =: G \in \{A_3, S_3\}$$

כי תת החבורות האחרות הן $\{1, \sigma\}$ עבור שיקוף σ כלשהו, וחבורה זו לא נוגעת באיבר שבו σ לא נוגע. נסמן L את שדה הפיצול של x^3+x+3 מעל $\mathbb{Q}$, ונשים לב כי

$$L \not\subseteq \mathbb{R}$$

שהרי לפולינום x^3+x+3 יש רק שורש ממשי אחד. נוכל להגדיר $L = (z \mapsto \bar{z})|_L$, נשים לב כי σ פועלת על שורשי הפולינום בתור חילוף - מחליפה את שני השורשים המרוכבים. לכן בהכרח $G = S_3$, כי σ אי זוגית.

תזכורת ניקח

$$f = \sum_{i=0}^d a_i x^i$$
$$g = \sum_{j=0}^e b_j x^j$$

פולינומים מעל שדה K . מגדירים

$$\text{Res}(f, g) = a_d^e a_e^d \prod_{f(x)=0, g(y)=0} (x - y) \in K$$

תכונות:

$$\text{Res}(a_0, g) = a_0^e$$
$$\text{Res}(x - a, x - b) = a - b$$
$$\text{Res}(f, g) = (-1)^{ed} \text{Res}(g, f)$$
$$\text{Res}(fg, h) = \text{Res}(f, h) \text{Res}(g, h)$$

ניתן לחשב את הרזולטנטה בעזרת הדטרמיננטה של מטריצת סילבסטר, שהגדרנו בהרצאה. אז מגדירים

$$\text{Disc}(f) = \frac{(-1)^{\frac{d(d-1)}{2}}}{a_d} \text{Res}(f, f')$$

ואפשר לכתוב גם

$$\text{Disc}(f) = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} a_d^{2d-2} \prod_{i \neq j} (r_i - r_j)$$

כאשר $\{r_i\}$ אוסף השורשים של f עם חזרות. נזכר שראינו שחבורת גלואה של פולינום מוכלת בתוך A_d אם ורק אם $\text{Disc}(f)$ היא ריבוע.

משפט 0.1 יהי $a \in \mathbb{Z}$. אזי

$$\text{Gal}(x^3+ax+1/\mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & a = 0, -2 \\ A_3 & a = -3 \\ S_3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הוכחה: השורשים הפוטנציאליים הם ± 1 . נציב:

$$0 = 1^3 + a + 1 \iff a = -2$$

$$0 = (-1)^3 - a + 1 \iff a = 0$$

במקרים אלה ברור כי חבורת גלואה היא $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, כי הפולינום מתפרק לפולינום לינארי כפול פולינום ריבועי אי פריק.

מעתה נניח כי f , הפולינום, אי פריק. נחשב:

$$\text{Disc}(f) = -4a^3 - 27$$

אם $a = -3$, נקבל

$$\text{Disc}(f) = 81 = 9^2$$

לכן הדיקרימיננטה היא ריבוע, כלומר החבורה מוכלת בתוך A_3 - אבל הפולינום אי פריק, ולכן זו A_3 או S_3 . נותר המקרה בו $a \neq 0, -2, -3$. נראה כי $\text{Disc}(f)$ אינה ריבוע. נניח בשלילה כי

$$-4a^3 - 27 = s^2$$

עבור $s \in \mathbb{Q}$ כלשהו - וברור שאז $s \in \mathbb{Z}$ אפילו. ראשית, ברור שכאשר $a > 0$, הביטוי הזה שלילי ולכן אינו ריבוע. נסמן $t = -a$, ונניח שהוא חיובי ושהוא לפחות 4 - במקרים האלה פשוט בודקים ורואים שזה לא ריבוע. לכן $t \geq 4$ ומתקיים

$$s^2 = 4t^3 - 27$$

נשים לב כעת כי $(s+9)^3 + (6t)^3 = (s-9)^3$ - ניוכח:

$$\begin{aligned} (s+9)^3 - (s-9)^3 &= 18((s^2 + 18s + 81) + s^2 - 81 + (s^2 - 18s + 81)) = \\ &= 18(3s^2 + 81) = 18(12t^3 - 81 + 81) = 216t^3 = (6t)^3 \end{aligned}$$

ממשפט פרמה האחרון (המקרה $n = 3$, שאינו מסובך כמו המשפט כולו), נובע כי $s - 9 \leq 0$ ולכן $s \leq 9$. זו סתירה, כי $t \geq 4$ ואם מציבים מקבלים שאגף ימין הוא לפחות $256 - 27 > 81 = 9^2$. ■

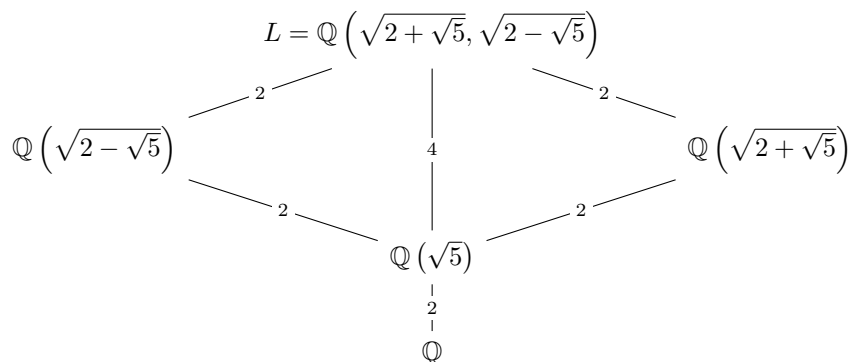
תרגיל חשבו את

$$\text{Gal}(x^4 - 4x^2 - 1/\mathbb{Q})$$

פתרון השורשים הם

$$\pm\sqrt{2 \pm \sqrt{5}}$$

שדות הפיצול נראים כמו:



כאשר L הוא שדה הפיצול של הפולינום. לכן נקבל שגודל החבורה הוא 8, מכלל המגדל. כל שייכון חייב לקיים

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{2 + \sqrt{5}} \mapsto \varepsilon_1 \sqrt{2 + \varepsilon_2 \sqrt{5}} \\ \beta &= \sqrt{2 - \sqrt{5}} \mapsto \varepsilon_3 \sqrt{2 - \varepsilon_2 \sqrt{5}} \end{aligned}$$

נשים לב שמתקיים

$$\alpha^2 + \beta^2 = 4$$
$$\sigma(\alpha)^2 + \sigma(\beta)^2 = 4$$

יש התאמה חד-חד-ערכית ועל בין חבורת גלואה לבין $\{\pm 1\}^3$ בגלל זה. נוכל להגדיר

$$\rho(\alpha) = \beta$$
$$\rho(\beta) = -\alpha$$
$$\varepsilon(\alpha) = -\alpha$$
$$\varepsilon(\beta) = \beta$$

ואז שמים לב שמתקיים $\rho\varepsilon = \varepsilon\rho^3$, ולכן החבורה היא D_8 .