

אלגברה ב2

© ארזים

25 באפריל 2017

הגדרה 0.1 יהי K שדה ויהי $f \in K[x]$ אי פריק ומתוקן. f ייקרא פריד אם מתקיימות התעונות השקולות הבאות:

1. $\gcd(f, f') = 1$.

2. לכל שדה הרחבה E/K , אין שורש כפול של f בתוך E .

3. f מתפרק למכפלת גורמים לינאריים שונים מעל $\bar{K}$.

הגדרה 0.2 אם E/K הרחבה, $\alpha \in E$ אלגברי מעל K , אזי α נקרא פריד אם הפולינום האי פריק שלו פריד.

הגדרה 0.3 הרחבה אלגברית E/K נקראת פרידה אם כל $\alpha \in E$ פריד מעל K . כאשר E/K סופית. פרידות שקולה לכך שמתקיים

$$[E : K]_s = [E : K]$$

טענה 0.4 f אינו פריד אם ורק אם $\text{char} K = p > 0$, ויש פולינום $g \in K[x]$ כאשר $f(x) = g(x^p)$.

הוכחה: נניח כי f לא פריד, כלומר $\gcd(f, f') \neq 1$. אזי $\gcd(f, f') = f$, כי הוא מחלק את f , שהוא אי פריק. נובע כי $f' \mid f$, ולכן $f' = 0$ - כי הנגזרת ממעלה קטנה מאשר f . לכן ברור כי המציין הוא $p > 0$, וכל מקדמי הנגזרת מתחלקים בו - כלומר כל המונומים של f הם חזקות של x^p . לכן $f(x) = g(x^p)$. להפך, אם $f(x) = g(x^p)$, אזי $f'(x) = 0$, ולכן $\gcd(f, f') = f \neq 1$ ולכן הפולינום לא פריד. ■

הגדרה 0.5 שדה ייקרא מושלם אם כל הרחבה אלגברית שלו הינה פרידה.

טענה 0.6 שדה K הוא מושלם אם ורק אם $\text{char} K = 0$, או $\text{char} K = p > 0$ ולכל $x \in K$ יש $y \in K$ עם $y^p = x$.

הוכחה: נניח את צד שמאל. אם $\text{char} K = 0$, זה נובע מהטענה הקודמת. נניח את התנאי השני. יהי $f \in K[x]$ שאינו פריד (בשליה). לפי הטענה, יש $g \in K[x]$ עם

$$f(x) = g(x^p) = \sum_{i=0}^n a_i x^{ip} = \sum_{i=0}^n (b_i)^p (x^i)^p = \left(\sum_{i=0}^n b_i x^i \right)^p$$

בסתירה לאי פריקות של f . לכן כל הפולינומים מעל K פרידים, ולכן הוא מושלם. בכיוון השני, נניח כי K מושלם וכי $\text{char} K = p > 0$ (אם המציין הוא 0 סיימנו). יהי $a \in K$, ונמצא b עבורו $b^p = a$. נגדיר

$$f(x) = x^p - a$$

יהי t שורש של f , כלומר $t^p = a$. לכן

$$f(x) = x^p - t^p = (x - t)^p$$

מכאן שאם g גורם אי פריק כלשהו של f , אז מצד אחד, כל שורשי g שונים (מפרידות - כי K מושלם), ומצד שני, $g(x) = (x - t)^r$ עבור $r \leq p$. בסך הכל נקבל כי $r = 1$, כלומר $g(x) = x - t$, ובפרט $t \in K$. לכן סיימנו. ■

הגדרה 0.7 בהנתן משפחת פולינומים $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq K[x]$, עבור שדה K כלשהו, מגדיר את שדה הפיצול של המשפחה להיות השדה הנוצר על ידי שורשי $\{f_i\}_{i \in I}$ בתוך $\bar{K}$.

הגדרה 0.8 הרחבה אלגברית E/K תקרא נורמלית אם מתקיימות התכונות השקולות הבאות:

1. E הינו שדה פיצול.

2. כל $f \in K[x]$ אי פריק שיש לו שורש בתוך E מתפצל לחלוטין מעל E .

3. לכל $\bar{E}$ ולכל שיכון σ של E מעל K לתוך $\bar{E}$, מתקיים

$$\sigma(E) \subseteq E$$

הערה 0.9 $K(\alpha)/K$ פרידה אם ורק אם α פריד מעל K .

הערה 0.10 יהי α אלגברי מעל K , ונסמן $f = \text{irr}(\alpha, K)$. אזי $K(\alpha)/K$ נורמלית אם ורק אם כל שורש של f הינו פולינום במשתנה α עם מקדמים מתוך K (בתוך סגור אלגברי נתון $\bar{K}$).

דוגמאות אם K שדה עם $\text{char} K \neq 2$, אזי כל הרחבה ריבועית היא נורמלית. זה נכון כי כל הרחבה כזו נראית כמו $K(\sqrt{a})/K$, ושורשי הפולינום $x^2 - a = 0$ הם $\pm\sqrt{a}$. ההרחבה $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ אינה נורמלית - יש שורשים מרוכבים, שאינם פולינומים רציונליים במספר $\sqrt[3]{2}$.

ההרחבה $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ נורמלית - כל שורשי הפולינום האי פריק של ζ_n הם שורשי יחידה מסדר n בעצמם, ולכן חזקות שלו. ההרחבה $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ נורמלית - מהגדרתו בתור $\{x \in \bar{\mathbb{F}}_p \mid x^{p^n} = x\}$.

הגדרה 0.11 הרחבה אלגברית נורמלית ופרידה נקראת הרחבת גלואה. מגדירים

$$\text{Gal}(L/K) = \text{Aut}_K(L)$$

דוגמה ההרחבה $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$ היא גלואה. נגדיר את האוטומורפיזם פרובניוס:

$$x \mapsto x^p$$

נקבל את האוטומורפיזמים הבאים:

$$\left\{ x \mapsto x^p, x \mapsto x^{p^2}, \dots, x \mapsto x^{p^n} = \text{id} \right\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \leq \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$$

כעת, ידוע לנו כי

$$\text{Aut}_K(L) = \text{Hom}_K(L, \overline{L})$$

היות וזו הרחבת גלואה. כלומר כמות האוטומורפיזמים הוא מעלת הפרידות של ההרחבה, שהיא לכל היותר מעלת ההרחבה - שהיא n . לכן

$$\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$