

אלגברה ב2

© ארזים

28 במרץ 2017

1 הרחבת שדות

תהי L/K הרחבת שדות. הגדרנו מעלה:

$$[L : K] = \dim_K L$$

אפשר לקבל הרחבה של K על ידי לקיחת $f \in K[x]$ אי פריק והגדרת $L = K[x]/(f)$.
דרך נוספת: עבור $\alpha \in \Omega$ נגדיר

$$K(\alpha) = \{q(\alpha) \mid q \in K(x)\}$$

כאשר Ω הוא שדה גדול שמכיל את K . זהו שדה, ואפשר להגדיר גם חוג:

$$K[\alpha] = \{f(\alpha) \mid f \in K[x]\}$$

$\alpha \in L$ ייקרא אלגברי מעל K אם יש $f \in K[x]$ $0 \neq f$ כך שמתקיים $f(\alpha) = 0$. זה שקול לכך שמתקיים $K[\alpha] = K(\alpha)$, או לכך שמתקיים

$$[K(\alpha) : K] < \infty$$

L/K תיקרא אלגברית אם כל $\alpha \in L$ אלגברי מעל K .
עבור $\alpha \in L$ אלגברי מעל K , קיים ויחיד פולינום מתוקן ואי פריק $f \in K[x]$ המקיים $f(\alpha) = 0$, ומעלתו $[K(\alpha) : K]$. f נקרא הפולינום המינימלי של α (או הפולינום האי פריק של α). הוא יסומן

$$\text{irr}(\alpha, K) = \text{irr}_K^\alpha(x)$$

כמו כן מתקיים

$$K(\alpha) \cong K[x]/(f)$$

תרגיל נגדיר $\zeta_8 = e^{\frac{2\pi i}{8}}$.

1. חשבו את $[\mathbb{Q}[\zeta_8] : \mathbb{Q}]$.

2. הראו כי $\mathbb{Q}[\zeta_8] = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$.

3. חשבו את $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) : \mathbb{Q}(\zeta_8)]$.

פתרון 1. ζ_8 מקיים את $x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1)$. אנחנו יודעים כי $x^4 + 1$ אי פריק מעל $\mathbb{Q}$, ומאפס את ζ_8 . לכן $[\mathbb{Q}[\zeta_8] : \mathbb{Q}] = 4$.

2. ראינו כי

$$\zeta_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

לכן בבירור $\zeta_8 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$. לכן ברור כי $\mathbb{Q}(\zeta_8) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$. נתבונן במגדל

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2})(i) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$$

שתי ההרחבות כאן מסדר 2, ולכן נובע

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot 2 = 4$$

כעת נתבונן במגדל

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_8) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$$

ההרחבה הראשונה ממעלה 4, וגם ההרחבה הגדולה היא ממעלה 4 כפי שראינו הרגע. לכן $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbb{Q}(\zeta_8)] = 1$, כלומר

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) = \mathbb{Q}(\zeta_8)$$

3. נתבונן במגדל $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$. ההרחבה השנייה היא שוב ממעלה 2 (דומה למה שראינו קודם). ההרחבה הראשונה ממעלה 4 - הפולינום $x^4 - 2$ מאפס את $\sqrt[4]{2}$ והוא אי פריק לפי איזנסטיין. לכן, נובע כי

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) : \mathbb{Q}] = 8$$

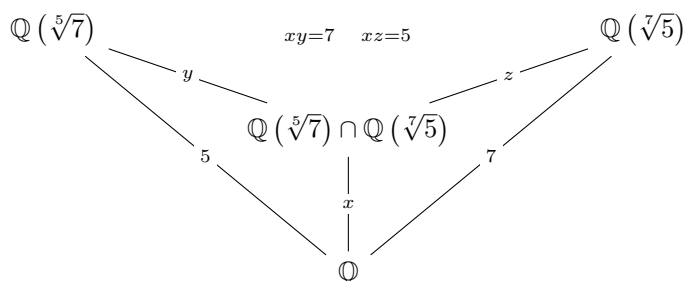
בעזרת המגדל $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ נקבל כי

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i) : \mathbb{Q}(\zeta_8)] = 2$$

תרגיל הראו כי

$$E := \mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}) = \mathbb{Q}$$

פתרון אינטואיציה בציור:



נשים לב כי $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) : \mathbb{Q}] = 5$, כי $x^5 - 5$ אי פריק לפי איזנסטיין. באופן דומה $[\mathbb{Q}(\sqrt[5]{7}) : \mathbb{Q}]$ מכלל המגדל,

$$[E : \mathbb{Q}] [\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) : E] = [\mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) : \mathbb{Q}]$$

ולכן $5 \mid [E : \mathbb{Q}]$. באותה צורה נקבל שהוא מחלק את 7, ולכן הוא 1.

תרגיל חשבו את

$$\left[\mathbb{Q}(\sqrt{3 + \sqrt{7}}) : \mathbb{Q} \right]$$

פתרון גרסה 1: נשים לב כי הפולינום $x^4 - 6x^2 + 2 = (x^2 - 3)^2 - 7$ מתאפס על

$\sqrt{3 + \sqrt{7}}$ ואי פריק (איזנסטיין), לכן המעלה היא 4.

גרסה 2: נשים לב כי במגדל $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{7}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3 + \sqrt{7}})$, ההרחבה הראשונה

ממעלה 2, והשנייה לא ממעלה 1, כי $\sqrt{3 + \sqrt{7}}$ מקיים את $x^2 - (3 + \sqrt{7})$ מעל

$\mathbb{Q}(\sqrt{7})$. כלומר די להראות כי $(a + b\sqrt{7})^2 \neq 3 + \sqrt{7}$. אפשר להראות את זה אבל זה מסובך.