

אלגברה ב2

© ארזים

27 ביוני 2017

הגדרה 0.1 חבורה G תקרא "חבורת גלואה" אם יש הרחבת גלואה של שדות L/K עם $G \cong \text{Gal}(L/K)$.

משפט 0.2 תהי G חבורה. התנאים הבאים שקולים:

1. G חבורת גלואה.

2. G היא חבורה (טופולוגית - כלומר יש טופולוגיה, והכפל וההופכי הן רציפות) קומפקטית, האוסדורף ואי-קשירה לחלוטין (כל רכיב קשירות הוא נקודה).

3. G היא גבול הפוך של חבורות סופיות - קיימות קבוצה I (סדורה חלקית שבה לכל שני איברים יש סופרימום) ובחירה $\{G_i\}_{i \in I}$ של חבורות סופיות, וקיימות העתקות מקשרות $\varphi_{ij} : G_i \rightarrow G_j$ לכל $i \geq j \geq k$ כך שהדיאגרמה הבא מתחלפת לכל $i \geq j \geq k$

$$\begin{array}{ccc} G_i & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & G_j \\ & \searrow \varphi_{ik} & \swarrow \varphi_{jk} \\ & G_k & \end{array}$$

ואז

$$G = \varprojlim G_i = \left\{ (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i \mid \forall i \leq j \quad \varphi_{ij}(g_i) = g_j \right\}$$

4. G היא תת חבורה סגורה של מכפלה ישרה של חבורות סופיות (הטופולוגיה על כל חבורה סופית היא דיסקרטית, והטופולוגיה על המכפלה היא טופולוגיית המכפלה).

הערה 0.3 חבורה כזו נקראת חבורה פרו-סופית.

הוכחה: $3 \Rightarrow 1$: ניקח I את אוסף כל התת הרחבות L_0 של L/K שהן גלואה וסופיות. נתאים

$$L_0 \in I \rightarrow G_{L_0} = \text{Gal}(L_0/K)$$

$4 \Rightarrow 3$: חיתוך של סגורות היא סגורה.

1 $\Rightarrow$ 4: נכתוב

$$G \leq \prod_{i \in I} G_i$$

כעת יספיק לנו לבנות הרחבת גלואה שבה החבורה הימנית היא חבורת גלואה שלה - כי אם $\text{Gal}(M/K) \cong \prod_i G_i$ אז $L := M^G$ יקיים $\text{Gal}(L/K)$ (אפילו יש שקילות בין זה לבין הסגירות של G במכפלה - נראה בשיעור הבא את התאמת גלואה לחבורות אינסופיות). את G_i מימשנו על ידי הוספת משתנים $x_1^{(i)}, \dots, x_{r_i}^{(i)}$. נבחר קבוצת משתנים זרה עבור כל i , ונקבל שדות מופרדים לינארית - כלומר נקבל מכפלה ישרה. ■

תרגיל האם $\mathbb{Z}$ היא חבורת גלואה?

תרגיל הראו כי כל חבורת גלואה אינסופית אינה בת-מניה.

פתרון ניקח הרחבה של שדות $K \subseteq L$. ניקח סדרה של תת הרחבות סופיות וגלואה (ממעלה לפחות 1): $K \subseteq L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L$. כל איבר בתוך $\text{Gal}(L_i/K)$ אפשר להרים אל $\text{Gal}(L_{i+1}/K)$ בשתי דרכים שונות לפחות. בגלל שאפשר לחזור על התהליך $\aleph_0$ פעמים, נקבל

$$|G| \geq 2^{\aleph_0} = \aleph$$

דוגמא ניקח $\mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_{2^p} \subseteq \mathbb{F}_{2^{p^2}} \subseteq \dots \subseteq \mathbb{F}_{2,p} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbb{F}_{2^{p^i}}$ כאשר p ראשוני. חבורת גלואה כאן הן $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, ולכן

$$\text{Gal}(\mathbb{F}_{2,p}/\mathbb{F}_2) = \varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}_p, +)$$

נצליב את כל המידע מכל הראשוניים, כדי לחשב את $\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_2}/\mathbb{F}_2)$ - כל השרשראות האלה מופרדות לינארית, ולכן

$$\text{Gal}(\overline{\mathbb{F}_2}/\mathbb{F}_2) = \prod_p \mathbb{Z}_p =: \hat{\mathbb{Z}}$$

זה כמובן עובד גם לכל $\mathbb{F}_p$.