

אלגברה ב2

© ארזים

13 ביוני 2017

תהי L/K הרחבת שדות סופית, ויהי $\alpha \in L$. α מגדיר העתקה K -לינארית:

$$M_\alpha : L \rightarrow L$$

$$M_\alpha(t) = \alpha t$$

נגדיר

$$\text{Tr}_{L/K}(\alpha) = \text{Tr}_K^L(\alpha) = \text{Tr}(M_\alpha)$$

באופן דומה מגדירים

$$N_{L/K}(\alpha) = N_K^L(\alpha) = \det(M_\alpha)$$

דוגמה ניקח $K = \mathbb{Q}, L = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\alpha = a + b\sqrt{d}$. ניקח בסיס $\{1, \sqrt{d}\}$ להרחבה שלנו. α מיוצג על ידי

$$\begin{pmatrix} a & db \\ b & a \end{pmatrix}$$

בבסיס שבחרנו. לכן

$$\text{Tr}(\alpha) = 2a$$

$$N(\alpha) = a^2 - b^2d$$

תכונות

$$\text{Tr}(\alpha + \beta) = \text{Tr}(\alpha) + \text{Tr}(\beta)$$

$$\text{Tr}(\lambda\alpha) = \lambda\text{Tr}(\alpha)$$

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$$

$$N(\lambda\alpha) = \lambda^{[L:K]}N(\alpha)$$

כאשר $\alpha, \beta \in L$, $\lambda \in K$. נסמן m_α את הפולינום המינימלי של α , וכן f_α את הפולינום האופייני של M_α . מלינארית ומחשבון מעלות:

$$f_\alpha = m_\alpha^{[L:K(\alpha)]}$$

משום שיש להם את אותם גורמים אי פריקים. כעת,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\alpha) &= \sum_{f_\alpha(\beta)=0} \beta = \left(\sum_{m_\alpha(\beta)=0} \beta \right) [L:K(\alpha)] \\ N(\alpha) &= \prod_{f_\alpha(\beta)=0} \beta = \left(\prod_{m_\alpha(\beta)=0} \beta \right)^{[L:K(\alpha)]} \end{aligned}$$

נניח כי L/K לא פרידה לכן יש שתי אפשרויות:

1. $[K(\alpha):K]$ לא פרידה. מכאן נקבל כי המצייס הוא $p > 0$, וכן m_α הוא פולינום במשתנה x^p . לכן $\text{Tr} \equiv 0$ כי הוא שווה למקדם של $x^{\deg m_\alpha - 1}$.
2. $[L:K(\alpha)]$ לא פרידה. מכאן נקבל כי המצייס הוא $p > 0$, וכן $p \mid [L:K(\alpha)]$. לכן $\text{Tr} \equiv 0$.

בכל מקרה קיבלנו עקבה טריוויאלית, ולכן מעתה נניח כי L/K פרידה. אזי

$$\text{Tr}_K^L(\alpha) = [L:K(\alpha)] \left(\sum_{m_\alpha(\beta)=0} \beta \right) = \sum_{\sigma \in \text{Emb}_K(L, \overline{K})} \sigma(\alpha)$$

וזאת בגלל טענות שראינו בכיתה על הרמת שיכונים. אם L/K גלואה, אזי

$$\text{Tr}_K^L(\alpha) = \sum_{\sigma \in \text{Gal}(L/K)} \sigma(\alpha)$$

עם הנורמה קורה משהו אנלוגי לחלוטין:

$$N_K^L(\alpha) = \left(\prod_{m_\alpha(\beta)=0} \beta \right)^{[L:K(\alpha)]} = \prod_{\sigma \in \text{Gal}(L/K)} \sigma(\alpha)$$

טענה 0.1 $\text{Tr}_K^L \neq 0$.

הוכחה: נובע ישירות מאי תלות של כרקטרים - העתקת העקבה היא סכום של שיכונים, כפי שראינו, וכל שיכון כזה הוא כרקטר של החבורה הכפלית. המקדמים בצירוף שמגדיר את העקבה אינם 0, ולכן $\text{Tr}_K^L(\alpha) \neq 0$. ■

מסקנה 0.2 התבנית $(x, y) = \text{Tr}_K^L(xy)$ אינה מנוונת.

יהי $x \in L$. אם לכל $y \in L$ מתקיים $\text{Tr}_K^L(xy) = 0$ וכן $x \neq 0$ אז סתירה
לטענה הקודמת, ולכן סיימנו (כפל באיבר הפיך זה חד-חד-ערכי ועל).

משפט 0.3 (הילברט 90, גרסה חיבורית) תהי L/K הרחבת גלואה ציקלית מסדר n עם יוצר σ . אזי $\beta \in L$ מקיים $\text{Tr}(\beta) = 0$ אם ורק אם $\beta = \alpha - \sigma(\alpha)$ עבור $\alpha \in L$ כלשהו.

הוכחה: כיוון אחד קל - אם $\beta = \alpha - \sigma(\alpha)$ אזי

$$\text{Tr}(\beta) = \text{Tr}(\alpha - \sigma(\alpha)) = \text{Tr}(\alpha) - \text{Tr}(\sigma(\alpha)) = 0$$

בכיוון השני, ניקח $\theta \in L$ עבורו $\text{Tr}(\theta) \neq 0$ (הנחנו $\text{Tr}(\beta) = 0$). נגדיר

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\text{Tr}(\theta)} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sigma^i(\theta) \left(\sum_{j=0}^{i-1} \sigma^j(\beta) \right) \right) \\ \sigma(\alpha) &= \frac{1}{\text{Tr}(\theta)} \left(\sum_{i=2}^n \sigma^i(\theta) \left(\sum_{j=1}^i \sigma^j(\beta) \right) \right) = \\ \alpha - \sigma(\alpha) &= \frac{1}{\text{Tr}(\theta)} \left(\beta \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^i(\theta) - \theta \sum_{i=1}^{n-1} \sigma^i(\beta) \right) = \\ &= \frac{1}{\text{Tr}(\theta)} \left(\beta \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i(\theta) - \theta \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i(\beta) \right) = \\ &= \frac{1}{\text{Tr}(\theta)} \left(\beta \text{Tr}(\theta) - \theta \text{Tr}(\beta) \right) = \beta\end{aligned}$$

■

משפט 0.4 (הילברט 90, גרסה כפלית) תהי L/K הרחבת גלואה ציקלית מסדר n עם יוצר σ . אזי $\beta \in L$ מקיים $N(\beta) = 1$ אם ורק אם $\beta = \frac{\alpha}{\sigma(\alpha)}$ עבור $\alpha \in L$.

ההוכחה דומה, ונשארת כתרגיל.

מסקנה 0.5 שלשות פיתגוריות: נתבונן בהרחבה $\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}$. נחפש $a, b \in \mathbb{Q}$ עם $a^2 + b^2 = 1$. זה שקול לכך שמתקיים $N_{\mathbb{Q}(i)/\mathbb{Q}}(a + ib) = 1$, ולכן

$$a + bi = \frac{c + di}{c - di} = \frac{(c + di)^2}{c^2 + d^2} = \frac{c^2 - d^2}{c^2 + d^2} + i \frac{2cd}{c^2 + d^2}$$

כי שיכון גלואה שיוצר את ההרחבה הוא ההצמדה המרוכבת. מכאן קיבלנו את כל השלשות הפיתגוריות:

$$(c^2 - d^2, 2cd, c^2 + d^2)$$