

אלגברה ב2

© ארזים

19 באפריל 2017

נמשיך מאיפה שעצרנו בשיעור שעבר.

משפט 0.1 (כפלויות של מעלות פרידות) יהי $K \subseteq L \subseteq E$ מגדל של הרחבות סופיות. אזי

$$[E : K]_s = [E : L]_s [L : K]_s$$

הוכחה: נצטרך שתי למות.

למה 0.2 בהנתן מגדל של הרחבות סופיות $K \subseteq L \subseteq E$ ובהנתן שייכון $\rho \in \text{Emb}_K(L, \overline{K})$, ניתן להרחיב אותו לשיכון $\hat{\rho} \in \text{Emb}_K(E, \overline{K})$. כלומר העתקת הצמצום

$$\text{res}_{E,L} : \text{Emb}_K(E, \overline{K}) \rightarrow \text{Emb}_K(L, \overline{K})$$

הוכחה: (המרצה מסמן פונקציות מימין) ההרחבה E/L סופית, ולכן נוכל לרשום

$$E = L(a_1, \dots, a_n)$$

כעת, נסתכל במגדל

$$K \subseteq L \subseteq L(a_1) \subseteq \dots \subseteq L(a_1, \dots, a_n) = E$$

לכן די להוכיח את הלמה עבור $E = L(a)$. נניח זאת. נסמן כעת

$$f = \text{irr}(a, L) \in L[x]$$

נרחיב את ρ להומומורפיזם:

$$\tilde{\rho} : L[x] \rightarrow \rho(L)[x]$$

על ידי

$$\tilde{\rho} \left(\sum w_i x^i \right) = \sum \rho(w_i) x^i$$

ברור כי $\tilde{\rho}$ הומומורפיזם חד-חד-ערכי (כי ρ חד-חד-ערכי) ועל (כי ρ על). נקח $b \in \overline{K}$ שהוא שורש של $\tilde{\rho}(f)$, כלומר $\tilde{\rho}(f)(b) = 0$. נסמן

$$\rho' = Sp_b \circ \tilde{\rho}$$

כאשר Sp היא ההצבה. כלומר

$$\rho'(f(x)) = Sp_b(\tilde{\rho}(f(x))) = \tilde{\rho}(f)(b)$$

לפי משפטי האיזומורפיזם נקבל שאם $\ker Sp_a \subseteq \ker \rho'$, אזי ρ' מתפרק דרך E . אכן:

$$\ker \rho' = \tilde{\rho}^{-1}(\ker Sp_b) = \tilde{\rho}^{-1}((\tilde{\rho}(f))) = (f) = \ker Sp_a$$

לכן ρ' מתפרק דרך E על ידי

$$\hat{\rho} : E = L(a) \rightarrow \rho(L)(b) \subseteq \overline{K}$$

כאשר $\alpha \in L$ מתקיים

$$\hat{\rho}(a) = \rho'(a) = Sp_b \tilde{\rho}(a) = \rho(a)$$

ולכן $\hat{\rho}$ אכן מרחיב את ρ .
תרשים של מה שעשינו:

$$\begin{array}{ccc} L[x] & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & \rho(L)[x] \\ \downarrow Sp_a & \searrow \rho' & \downarrow Sp_b \\ E = L(a) & \xrightarrow{\hat{\rho}} & \rho(L)(b) \subseteq \overline{K} \end{array}$$

■

הגדרה 0.3 הרחבה סופית N/K נקראת נורמלית אם, כשניקח $N \subseteq \overline{K}$, אז לכל $\sigma \in \text{Emb}_K(N, \overline{K})$ מתקיים $\sigma(N) = N$.

דוגמאות $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ נורמלית, כי שני השיכונים נתונים על ידי $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}, \sqrt{2} \rightarrow -\sqrt{2}$.
ההרחבה $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ אינה נורמלית - יש שיכון הנתון על ידי $\sqrt[3]{2} \rightarrow \zeta_3 \sqrt[3]{2}$ שאינו שומר את ההרחבה.

למה 0.4 תהי L/K הרחבה סופית. אזי קיימת הרחבה נורמלית סופית N/K המכילה את L .

הוכחה: נקח את N להיות ההרחבה המינימלית של K בתוך $\bar{K}$ שמכילה את $\sigma(L)$ לכל $\sigma \in \text{Emb}_K(L, \bar{K})$. יש כמות סופית של שיכונים, כלומר יש כמות סופית של $\sigma(L)$ שונים, ולכן N/K סופית.

נותר להוכיח כי זו הרחבה נורמלית. אם נקח $\sigma : N \rightarrow \bar{K}$ שיכון עם $\sigma|_K = \text{id}$, אזי

$$\sigma|_L(L) \subseteq \sigma(N)$$

וכמובן שלכל $\rho \in \text{Emb}_K(L, \bar{K})$ מתקיים

$$\sigma(\rho(L)) \subseteq \sigma(N)$$

$\sigma(N)$ למעשה נוצר על ידי $\sigma(\rho(L))$. כמובן שמתקיים

$$\{\rho(L)\} \supseteq \{\sigma(\rho(L))\}$$

לכן נקבל $N \supseteq \sigma(N)$. אבל $[N : K] = [\sigma(N) : N]$, כי σ איזומורפיזם, ולכן $\sigma(N) = N$. ■

אנחנו סופסוף מוכנים להוכחת המשפט.

יש לנו מגדל $K \subseteq L \subseteq E$ של הרחבות סופיות. נשים לב כי $\bar{K} = \bar{L}$. נגדיר

$$\Phi : \text{Emb}_K(E, \bar{K}) \rightarrow \text{Emb}_K(L, \bar{K}) \times \text{Emb}_L(E, \bar{K})$$

די יהיה להראות כי Φ חד־חד־ערכית ועל. לפי הלמה השנייה, יש הרחבה נורמלית N/K המכילה את E . כעת, לכל $\rho \in \text{Emb}_K(L, \bar{K})$ נוכל לפי הלמה הראשונה לבחור הרחבה נורמלית, ולכן $\hat{\rho} \in \text{Emb}_K(N, \bar{K})$

$$\hat{\rho} = \text{Emb}_K(N, N)$$

כעת, בהנתן $\sigma \in \text{Emb}_K(E, \bar{K})$, נסמן $\rho = \sigma|_L$, ונגדיר

$$\Phi(\sigma) = (\rho, \hat{\rho}^{-1}\sigma|_E)$$

נראה כי הקואורדינטה הימנית אכן משביתה את L (ברור שזה שיכון של E לתוך $\bar{K}$): עבור $x \in L$ מתקיים

$$\hat{\rho}^{-1}(\sigma(x)) = \hat{\rho}^{-1}(\rho(x)) = \hat{\rho}^{-1}(\hat{\rho}(x)) = x$$

נראה כי Φ חד-חד-ערכית:

$$\begin{aligned}\Phi(\sigma) &= \Phi(\tau) \\ \sigma|_L = \tau|_L &=: \rho \\ \hat{\rho}^{-1}\sigma &= \hat{\rho}^{-1}\tau \Rightarrow \sigma = \tau\end{aligned}$$

נותר להראות כי Φ על. יהי (ρ, ι) בטוח. נגדיר

$$\sigma = (\hat{\rho}\iota)|_E$$

כעת בבירור

$$\sigma|_L = (\hat{\rho}\iota)|_L = \hat{\rho}|_L = \rho$$

וכן

$$\iota = (\hat{\rho}^{-1}\sigma)|_E$$

■ וסיימנו.

הגדרה 0.5 תהי L/K הרחבה סופית. נסמן $\text{Aut}_K(L)$ את אוסף האוטומורפיזמים של L שמשביתים את K . זו חבורה.

1. נאמר כי L/K פרידה אם $[L : K]_s = [L : K]$.
2. נאמר כי L/K נורמלית אם $|\text{Aut}_K(L)| = [L : K]_s$.
3. נאמר כי L/K גלואה אם היא פרידה ונורמלית, כלומר $|\text{Aut}_K(L)| = [L : K]$. במצב זה נסמן

$$\text{Gal}(L/K) := \text{Aut}_K(L)$$

ונקרא לחבורה הזו חבורת גלואה של L מעל K .

משפט 0.6 במגדל של הרחבות סופיות $K \subseteq L \subseteq E$ מתקיים E/K פרידה אם ורק אם E/L וגם L/K פרידות.

■ **הוכחה:** נובע מיידית מהכפלויות של שני סוגי המעלות, ומאי השוויון ביניהן.

הגדרה 0.7 יהי K שדה ויהי $f \in K[x]$ ממעלה חיובית.

1. נאמר כי f פריד אם אין לו שורשים כפולים בתוך $\overline{K}$ (או בכל הרחבה שדות L/K , באופן שקול).

2. נאמר כי $\alpha \in L$ פריד מעל K אם $\text{irr}(\alpha, K)$ פריד, כאשר L/K הרחבה.

3. נאמר כי f מתפצל מעל הרחבה L/K אם קיימים $c, \alpha_i \in L$ המקיימים

$$f = c \cdot \prod_i (x - \alpha_i)$$

4. L/K נקרא שדה פיצול של f אם f מתפצל מעליו, וכן L נוצר על ידי שורשי f .

טענה 0.8 (הקשר בין פולינומים לשדות) תהי L/K הרחבה סופית.

1. $\alpha \in L$ פריד מעל K אם ורק אם $K(\alpha)/K$ פרידה.

2. L/K פרידה אם ורק אם כל $\alpha \in L$ הוא פריד מעל K .

3. L/K נורמלית אם ורק אם לכל $\alpha \in L$, הפולינום $\text{irr}(\alpha, K)$ מתפצל מעליה.

4. אם L/K שדה פיצול של פולינום $f \in K[x]$ אזי L/K נורמלי.

5. אם L/K שדה פיצול של פולינום פריד אזי L/K גלואה.

הוכחה: בשבוע הבא.

■