

אלגברה ב2

© ארזים

5 באפריל 2017

ניזכר בהגדרה:

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k & n = p_1 \cdots p_k, \gcd(p_i, p_j) = 1 \\ 0 & \text{o/w} \end{cases}$$

טענה 0.1 מתקיים

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

הוכחה: נכתוב

$$n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$$

פירוק למכפלת ראשוניים שונים. אזי

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{d|p_1 \cdots p_k} \mu(d) = \sum_{S \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^k = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} (-1)^r = ((-1) + 1)^k = 0$$

■

משפט 0.2

$$\pi_p(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) p^d$$

הוכחה: נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned} p^n &= |\mathbb{F}_{p^n}| = \left| \bigcup_{d|n} \{\alpha \in \mathbb{F}_{p^n} \mid [\mathbb{F}_p[\alpha] : \mathbb{F}_p] = d\} \right| = \sum_{d|n} |\{\alpha \in \mathbb{F}_{p^n} \mid [\mathbb{F}_p[\alpha] : \mathbb{F}_p] = d\}| = \\ &= \sum_{d|n} d \pi_p(d) \end{aligned}$$

קעת נוכיח את המשפט באינדוקציה. נניח נכונות לכל $d < n$, ואז

$$p^n = \sum_{d|n} d \pi_p(d) = \sum_{n \neq d|n} d \left(\frac{1}{d} \sum_{k|d} \mu\left(\frac{d}{k}\right) p^k \right) + n \pi_p(n)$$

בשלב זה מספיק להראות שאם נציב את הביטוי המבוקש במקום $\pi_p(n)$ נקבל שוויון.

$$\begin{aligned} p^n &= \sum_{n \neq d|n} \sum_{k|d} \mu\left(\frac{d}{k}\right) p^k + \sum_{k|n} \mu\left(\frac{n}{k}\right) p^k = \sum_{d|n} \sum_{k|d} \mu\left(\frac{d}{k}\right) p^k = \sum_{k|d|n} \mu\left(\frac{d}{k}\right) p^k \\ &= \sum_{k|n} \sum_{k|d|n} \mu\left(\frac{d}{k}\right) p^k = \sum_{k|n} p^k \sum_{k|d|n} \mu\left(\frac{d}{k}\right) = \sum_{k|n} p^k \sum_{e|\frac{n}{k}} \mu(e) = \sum_{\substack{k|n \\ \frac{n}{k}=1}} p^k = p^n \end{aligned}$$

■

הגדרה 0.3 בהינתן הרחבת שדות K/F נסמן $\text{Hom}_F(K, \overline{F})$ את קבוצת כל השיכונים של K לתוך $\overline{F}$ מעל F (כלומר, שמקבעים את F איבר איבר). מסמנים גם

$$\text{Emb}_F(K, \overline{F}), \text{Ism}_F(K, \overline{F})$$

הגדרה 0.4 מעלת הפרידות של K מעל F היא:

$$[K : F]_S = |\text{Hom}_F(K, \overline{F})|$$

זו נקראת גם מעלת הספרביליות.

הגדרה 0.5 כרקטר של חבורה G הוא הומומורפיזם $\varphi : G \rightarrow F^*$, כאשר F שדה.

הערה 0.6 הכרקטרים של חבורה G נמצאים במרחב הווקטורי מעל F של פונקציות $G \rightarrow F$.

למה 0.7 כרקטרים שונים הם בלתי תלויים.

הוכחה: נוכיח בשלילה. ניקח צירוף לינארי לא טריוויאלי מינימלי של כרקטרים שמתאפס:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i = 0$$

כלומר, לכל $g \in G$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i(g) = 0$$

יהי $h \in G$ המקיים $\chi_1(h) \neq \chi_2(h)$, ואז נכפול פי $\chi_1(h)$ את כל המשוואה:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i(g) \chi_1(h) = 0$$

כמו כן, נציב בשוויון הקודם gh :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i(gh) = 0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_i(g) \chi_i(h)$$

נחסר בין שני השוויונות האחרונים שקיבלנו, ואז

$$\sum_{i=2}^n \lambda_i (\chi_i(h) - \chi_1(h)) \chi_i(g) = 0$$

■ וזה צירוף לינארי לא טריויאלי קצר יותר מהמקורי שלקחנו, בסתירה למינימליות.

טענה 0.8 עבור הרחבות סופיות מתקיים $[K : F]_S \leq [K : F]$.

הוכחה: יהיו $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ שיכונים של K לתוך $\bar{F}$ מעל F , ונסמן $n = [K : F]$. נבחר בסיס $e_1, \dots, e_n$ של K מעל F . אם כן, $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ הם כרקטרים של K^* לתוך $\bar{F}$, ולכן בלתי תלויים לינארית. לכן, הווקטורים

$$\left(\begin{pmatrix} \sigma_i(e_1) \\ \vdots \\ \sigma_i(e_n) \end{pmatrix} \right)_{i=1}^m$$

בלתי תלויים לינארית. נוכיח זאת: נניח כי לכל j מתקיים

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \sigma_i(e_j) = 0$$

אזי ההעתקה $\sum \lambda_i \sigma_i$ היא העתקה לינארית שמתאפסת על איברי הבסיס של K/F , ועל כן היא העתקת האפס - כלומר $\lambda_i = 0$ לכל i . אם כן, המטריצה

$$(\sigma_i(e_j))_{i,j=1,1}^{m,k}$$

היא מדרגה m . כמו כן, הדרגה היא לכל היותר n , ולכן $m \leq n$, וסיימנו - הראינו שכל כמות סופית של שיכונים היא קטנה מאשר n , ולכן הכמות הכללית סופית וקטנה יותר מאשר n . ■