

אלגברה ב2

© ארזים

28 במרץ 2017

1 הרחבת שדות

היינו באמצע הוכחת טענה - נותר להוכיח את הטענה הבאה:

טענה 1.1 תהי E/F הרחבה סופית, $\alpha \in E$. אזי נגדיר $I = \{f \in F[x] \mid f(\alpha) = 0\}$, וניקח ממנו $f \neq 0$ ממעלה מינימלית, שנסמנה n . אזי $\{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$ מהווה בסיס של $F(\alpha)/F$, וכן $F[\alpha] = F(\alpha)$, $[F(\alpha) : F] = n = \deg f$.

הוכחה: אם $\{1, \dots, \alpha^{n-1}\}$ תלויים לינארית, אזי

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i = 0$$

כאשר לא כל a_i הם 0. לכן קיבלנו פולינום ממעלה לכל היותר $n-1$ שמתאפס על α , בסתירה למינימליות של f . לכן הקבוצה שלנו בלתי תלויה לינארית. נראה ראשית כי

$$F[\alpha] \subseteq \text{Span}_F \{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$$

אכן, אם $g \in F[x]$, נחלק עם שארית בפולינום f :

$$g = qf + r$$

כאשר $\deg r < n$. אזי

$$g(\alpha) = f(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha) \in \text{Span}_F \{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$$

כעת, נוכיח כי $F(\alpha) \subseteq \text{Span} \{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$. נקח $g \in F[x]$ עם $g(\alpha) \neq 0$. נרצה להראות שגם $\frac{1}{g(\alpha)} \in \text{span} \{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$.
 $g(\alpha) \neq 0$, ולכן $f \nmid g$. אי פריק, ולכן $\gcd(f, g) = 1$. לכן קיימים $A, B \in F[x]$ שמקיימים

$$A(x)f(x) + B(x)g(x) = 1$$

כעת,

$$B(\alpha)g(\alpha) = 1$$

$$\frac{1}{g(\alpha)} = B(\alpha) \in F[\alpha] \subseteq \text{Span}_F \{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$$

לסיכום קיבלנו

$$F(\alpha) = F[\alpha] = \text{Span}_F \{1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1}\}$$

■

וזו גם קבוצה בלתי תלויה לינארית.

דוגמא תהי $F/\mathbb{Q}$ הרחבה ריבועית, כלומר $[F:\mathbb{Q}] = 2$. למשל $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ - כי הפולינום האי פריק של $\sqrt{2}$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא $x^2 - 2$ (אי פריק מאיזשטיין). הבסיס הוא $\{1, \sqrt{2}\}$, כלומר

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

באופן כללי, נקח $\alpha \in F \setminus \mathbb{Q}$. אזי $1, \alpha$ בלתי תלויים לינארית מעל $\mathbb{Q}$. לכן הם בסיס, כי זו הרחבה ריבועית. אזי

$$\alpha^2 = a_1\alpha + a_0$$

לכן $f(x) = x^2 - a_1x - a_0$ הוא הפולינום המינימלי של α . נבצע השלמה לריבוע:

$$f(x) = \left(x - \frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0 - \frac{a_1^2}{4}$$

נקבל כי

$$F = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q}\left(\underbrace{\alpha - \frac{1}{2}a_1}_{\beta}\right) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{\frac{4a_0 + a_1^2}{4}}\right)$$

$$\text{וזאת היות ומתקיים } \beta^2 = a_0 + \frac{1}{4}a_1^2 = \frac{4a_0 + a_1^2}{4}$$

מסקנה 1.2 אם $F/\mathbb{Q}$ הרחבה ריבועית אזי $F = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, כאשר $d \in \mathbb{Q}$.

תהי E/F הרחבה של שדות, ויהי $\alpha \in E$.

הגדרה 1.3 נאמר כי α אלגברי אם $F(\alpha)/F$ סופית. נסמן $\text{irr}(\alpha, F) \in F[x]$ את הפולינום המתוקן ממעלה מינימלית שמאפס את α (ראינו שהוא אי פריק).

הגדרה 1.4 אם α אינו אלגברי, α נקרא נעלה (טרנסנדנטלי).

הגדרה 1.5 ההרחבה E/F נקראת אלגברית אם כל $\alpha \in E$ אלגברי מעל F .

הגדרה 1.6 נקרא סגור אלגברית אם אין לא הרחבות אלגבריות פרט לעצמו. באופן שקול: אם α אלגברי מעל E , אזי $\alpha \in E$.

הגדרה 1.7 הרחבה אלגברית E/F , כאשר E סגור אלגברית, נקראת סגור אלגברי של F . מטרתנו להראות את הדברים הבאים:

טענה 1.8 אם E סגור אלגברית, אז לכל פולינום $f \in E[x]$ ממעלה חיובית יש שורש בתוך E .

משפט 1.9 לכל שדה F יש סגור אלגברי.

כדי להראות את אלה, נבנה כל מיני כלים.

למה 1.10 יהי F שדה, $f \in F[x]$ פולינום אי פריק. אזי

$$E = F[x] / (f)$$

היא הרחבה סופית של F , ואם נסמן בתור $\alpha \in E$ את מחלקת השקילות של x , כלומר $\alpha = x + (f)$ אזי $E = F(\alpha)$, וכן $\text{irr}(\alpha, F) = f(x)$.

הוכחה: נרצה להראות כי E שדה. נקח $g \in F[x]$ כך שמתקיים $g + (f) \neq 0 \in E$. אזי $g \notin (f)$, כלומר $g \nmid f$. אי פריק, ולכן $\text{gcd}(f, g) = 1$, ולכן קיימים $A, B \in F[x]$ המקיימים

$$Af + Bg = 1$$

לכן

$$Bg + (f) = 1 + (f)$$

לכן B הוא ההופכי של g בתוך E . לכן E הוא שדה. כעת, נסתכל על

$$f(\alpha) = f(x) + (f) = 0 + (f) \in E$$

לכן $f(\alpha) = 0 \in E$. יתר על כן, נזהה את F בתור תת שדה של E על ידי

$$c \in F \leftrightarrow c + (f)$$

אזי f הוא הפולינום המינימלי שמאפס את α , וכן $E = F[\alpha]$. ■