

אלגברה ב2

© ארזים

28 ביוני 2017

1 הרחבות גלואה אינסופיות

הגדרנו טופולוגיה על $\text{Gal}(N/K)$. בסיס של הסביבות הפתוחות של 1 הוא

$$U_E = \text{Gal}(N/E)$$

באשר $K \subseteq E \subseteq N$ עם $[E:K] < \infty$. הסביבות הפתוחות של σ הן σU_E . ראינו שהקבוצות U_E הן פתוחות וסגורות.

הבחנה נניח כי $K \subseteq L \subseteq N$ תת שדה. אזי

$$\text{Gal}(N/L) = \bigcap_{K \subseteq E \subseteq L \text{ finite}} \text{Gal}(N/E)$$

וזו קבוצה סגורה.

טענה 1.1 אם $K \subseteq L \subseteq N$ מגדל של הרחבות אלגבריות עם N/K גלואה, ואם $\sigma : L \rightarrow N$ עם $\sigma|_K = \text{id}$, אזי ניתן להרחיב את σ להעתקה $\hat{\sigma} : N \rightarrow N$ עם $\hat{\sigma}|_L = \sigma$.

הוכחה: את המקרה הסופי עשינו בעבר. המקרה האינסופי נובע ממנו על ידי הלמה של צורן - נדלג על הפרטים. ■

משפט 1.2 תהי N/K הרחבת גלואה עם חבורת גלואה $G = \text{Gal}(N/K)$. נסמן $\leq_c, \triangleleft_c$ תת חבורה (ונורמלית) סגורה. אזי ההתאמות

$$N^H = \{x \in N \mid \forall h \in H \quad hx = x\} \leftrightarrow H \leq_c G$$
$$K \subseteq L \subseteq N \mapsto \text{Gal}(N/L) \leq_c G$$

בין תת חבורות סגורות של G לתת שדות של N/K הן הופכיות ומקיימות את כל התכונות מהמפט היסודי של תורת גלואה (הפיכת סדר, שימור אינדקסים סופיים, שמירת נורמליות וכן הלאה).

הוכחה: נראה רק 1-1. בכיוון הראשון, יהי $K \subseteq L \subseteq N$ תת שדה ונסמן $H = \text{Gal}(N/L)$, וכן $N^H = \{x \in N \mid \forall h \in H \quad hx = x\}$. נרצה להראות כי $N^H = L$. ברור כי $L \subseteq N^H$ (מההגדרה). נניח בשלילה שזו הכלה ממש - אז יש $x \in N^H \setminus L$. כיוון שהאיבר x הוא אלגברי מעל K , ולכן מעל L , ההרחבה $L(x)/L$ היא סופית, ולכן יש $L(x) \subseteq N_0 \subseteq N$ כך שההרחבה

N_0/L היא גלואה וסופית). מתורת גלואה הסופית, יש $\tau \in N_0 \rightarrow N_0$ עם $\tau|_{L_0} = \text{Id}$, אבל $\tau(x) \neq x$. נרחיב את τ שרירותית אל $\hat{\tau}: N \rightarrow N$, כלומר $\hat{\tau} \in \text{Gal}(N/L) = H$. אזי כיוון שלקחנו $x \in N^H$ נקבל כי $x = \hat{\tau}(x) = \tau(x) \neq x$ בסתירה. אם כן, $L = N^H$.
 כעת, נוכי דבר מעט חזק יותר מאשר הכיוון השני - ניקח $H \leq G$, ונסמן $L = N^H$. אז נוכיח כי $\text{Gal}(N/L) = \overline{H}$ (כלומר הסגור של H - הקבוצה הסגורה המינימלית ביחס להכללה שמכילה את H). נעיר שיש תנאים שקולים לכך שיתקיים $Z = \overline{H}$ - זה שקול לשלושת הדברים הבאים (יחד):

$$1. X \subseteq Z$$

$$2. Z \text{ סגורה.}$$

$$3. \text{ לכל } z \in Z \text{ ולכל סביבה פתוחה } z \in U \text{ מתקיים } U \cap X \neq \emptyset$$

ברור שסיפיק לנו להוכיח $\text{Gal}(N/L) = \overline{H}$, כי אם H סגורה אזי $H = \overline{H}$ (זה חזק יותר משרצינו). נוכיח את התנאים. ברור כי $H \leq \text{Gal}(N/L)$, וראינו כבר שזו סגורה. נותר להוכיח את התנאי השלישי.

נקח $\sigma \in \text{Gal}(N/L)$, ונקח E/K סופית, $E \subseteq L$ - נסתכל בסביבה σU_E . ניקח $E \subseteq N$ כאשר N_0/K גלואה סופית. אז $U_{N_0} \subseteq U_E$, ואז יסיפיק לנו להוכיח כי $\sigma U_{N_0} \cap H \neq \emptyset$ - כלומר, בלי הגבלת הכלליות, E/K גלואה. נרצה למצוא $\tau \in H$ עם $\tau|_E = \sigma|_E$. נסמן $\rho = \sigma|_E$ כעת

$$H_0 = \{\tau|_E \mid \tau \in H\}$$

אזי

$$E^{H_0} = \{x \in E \mid \forall \tau \in H \ \tau x = x\} = \{x \in E \mid x \in L\} = E \cap L$$

ולכן ממשפט גלואה לחבורות סופיות, נקבל

$$H_0 = \text{Gal}(E/E \cap L)$$

אבל לכל $x \in E \cap L$ מתקיים $\rho(x) = \sigma(x) = x$. לכן $\rho \in \text{Gal}(E/E \cap L) = H_0$, ולכן יש $\tau \in H$ עם $\tau|_E = \rho|_E$, כמו שרצינו. ■