

אלגברה ב2

© ארזים

27 ביוני 2017

1 הרחבות גלואה אינסופיות

ראינו שהתאמת גלואה במקרה האינסופי לא עובדת - נתנו דוגמא שבה יש יותר מדי תת חבורות (יותר מאשר תת הרחבות). נגדיר טופולוגיה על $G = \text{Gal}(L/K)$.

הגדרה 1.1 טופולוגיה על קבוצה X היא אוסף $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ עם התכונות הבאות:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

2. אם $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ אזי גם

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$$

3. אם $U, V \in \mathcal{T}$ אזי גם $U \cap V \in \mathcal{T}$.

קבוצה $A \in \mathcal{T}$ נקראת פתוחה, וקבוצה $B \in \mathcal{T}$ עם $B^c \in \mathcal{T}$ נקראת סגורה.

הגדרה 1.2 נאמר כי $\sigma_1, \sigma_2 \subseteq G$ "קרובות" אם יש הרחבה סופית E/K (עם $E \subseteq L$) שמקיימת $\sigma_1|_E = \sigma_2|_E$.

הגדרה 1.3 הטופולוגיה שלנו על G תהיה זו שנוצרת (כלומר, אוסף כל האיחודים מעוצמה כלשהי וכל החיתוכים הסופיים) מהקבוצות

$$U_{E,\sigma} = \{\tau \in G \mid \tau|_E = \sigma|_E\}$$

כאשר $K \subseteq E \subseteq L, \sigma \in G$.

נשים לב שאם נסמן

$$U_E = U_{E,\text{id}}$$

אזי

$$U_{E,\sigma} = \sigma U_E$$

הערה 1.4, $U_E \leq G$, והיא פתוחה (מההגדרה). האינדקס שלה סופי $[G : U_E] \leq [E : K] = n$. אכן, אם ניקח $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ כל השיכונים של E לתוך L , ונרחיב אותם שרירותית לכל L , אז כל $\sigma : L \rightarrow L$ יהיה i עם $\sigma|_E = \sigma_i$. לכן נקבל כי $\sigma U_E = \sigma_i U_E$. אם כן, $\sigma U_E = U_E$ הם כל הקוסטים.

מסקנה 1.5 $U_E \leq G$ סגורה.

הוכחה: נוכיח טענה חזקה יותר. תהי $H \leq G$ פתוחה ומאינדקס סופי. נראה כי H סגורה. נכתוב

$$G = \bigcup_{i=1}^n \sigma_i H \Rightarrow H = G \setminus \left(\bigcup_{i=2}^n \sigma_i H \right)$$

■ הקבוצה שמחסרים כאן היא פתוחה, ולכן קיבלנו כי H סגורה.

דוגמא תהי G סופית עם הטופולוגיה הדיסקרטית (כל סינגלטון הוא פתוח). אזי כל תת חבורה היא פתוחה וסגורה.

דוגמא למרחב טופולוגי כללי יותר: מרחב קנטור. יש בניות מפורשות (מתחילים מהקטע $[0, 1]$ ומוציאים בכל שלב את השליש האמצעי של כל קטע שנשאר לנו), או כתיבה:

$$K = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \mid a_i \in \{0, 2\} \right\}$$

זו קבוצה סגורה (כחיתוך של סגורות) מעוצמה $2^{\aleph_0}$ שבה כל קבוצה פתוחה היא סגורה.

הערה 1.6 יש על K מבנה של חבורות:

$$K \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\aleph_0}$$

כאשר האיזומורפיזם כאן הוא על ידי הומיאומורפיזם (העתקה חד חד ערכית ועל שמעבירה פתוחה לפתוחה בשני הכיוונים). הטופולוגיה באגף שמאל היא טופולוגיית המכפלה (מסובך, אפשר לקרוא באינטרנט).

דוגמא נבחר $l \geq 3$ ראשוני, וכן p ראשוני נוסף. נסתכל על המגדל האינסופי:

$$\mathbb{F}_p \subseteq \mathbb{F}_{p^l} \subseteq \mathbb{F}_{p^{l^2}} \subseteq \dots \subseteq L = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_{p^{l^i}}$$

נסמן $\sigma = \text{Frob}_p \in G = \text{Gal}(L/\mathbb{F}_p)$ נשים לב שמתקיים

$$L^{\langle \sigma \rangle} = \{x \in L \mid \sigma(x) = x\} = \{x \in L \mid x^p = x\} = \mathbb{F}_p$$

כדי להראות שהתאמת גלואה נכשלת, צריך להראות שלא מתקיים $\langle \sigma \rangle = G$, כלומר למצוא $\tau \in G$ שאינו חזקה של σ . נבחר $\tau_1 \in \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^l}/\mathbb{F}_p)$ עם $\tau_1 = \sigma|_{\mathbb{F}_{p^l}}$. כעת:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^{l^2}}/\mathbb{F}_p) & \xrightarrow{res} & \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^l}/\mathbb{F}_p) \\
 & & \parallel & & \parallel \\
 C_{l^2}^l & \longrightarrow & C_{l^2} & \longrightarrow & C_l \cong C_{l^2}/C_{l^2}^l \\
 & & \parallel & & \parallel \\
 & & \langle \sigma \mid \mathbb{F}_{p^{l^2}} \rangle & & \langle \sigma \mid \mathbb{F}_{p^l} \rangle
 \end{array}$$

לפשטות נסמן מעתה $\sigma_i = \sigma \mid_{\mathbb{F}_{p^{l^i}}}$. נבחר

$$\tau_2 = \sigma_2^{1+l} = \underbrace{\sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_2}_{l+1}$$

ואז

$$\tau_2 \mid_{\mathbb{F}_{p^l}} = \tau_1$$

נגדיר

$$\tau_n \in \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^{l^n}}/\mathbb{F}_p)$$

עם

$$\tau_n = \sigma_n^{1+l+\dots+l^{n-1}}$$

זה נראה כך:

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \mid \\
 \mathbb{F}_{p^{l^n}} \\
 \mid \\
 \vdots \\
 \mid \\
 \mathbb{F}_{p^{l^2}} \\
 \mid \\
 \mathbb{F}_{p^l} \\
 \mid \\
 \mathbb{F}_p
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \nearrow \tau_2 = \sigma_2^{1+l} \\
 \nearrow \tau_n = \sigma_n^{1+l+\dots+l^{n-1}} \\
 \nearrow \tau_1 = \sigma_1^1
 \end{array}$$

אם $m \geq n$ וכן $x \in \mathbb{F}_{p^{l^n}} \subseteq \mathbb{F}_{p^{l^m}}$ אזי

$$\tau_m(x) = \sigma^{1+l+\dots+l^{m-1}}(x) = \sigma\left(\sigma^l\left(\dots\sigma^{l^{m-1}}(x)\right)\right) = \sigma\left(\sigma^l\left(\dots\sigma^{l^{n-1}}(x)\right)\right) = \tau_n(x)$$

וזאת משום שלקחנו $x \in \mathbb{F}_{p^{l^n}}$ וכן $\sigma^{l^k}(x) = x$ לכל $k \geq n$. נגדיר כעת $\tau \in G$ על ידי

$$\tau(x) = \tau_n(x)$$

על $x \in \mathbb{F}_{p^{l^n}}$. זה מוגדר היטב על האיחוד L . נטען כי לכל $k \in \mathbb{Z}$ מתקיים

$$\tau \neq \sigma^k$$

נוכיח זאת. אם יש $k \in \mathbb{Z}$, כזה, אזי לכל $n \geq 1$ מתקיים $\tau_n \mid \sigma_n^k$ (על ידי צמצום אל $\mathbb{F}_{p^{l^n}}$), כאשר שוויון זה הוא בחבורה $\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^{l^n}}/\mathbb{F}_p)$. מצד שני, $\tau_n = \sigma_n^{1+l+\dots+l^{n-1}}$, ומכך שלכל $n \geq 1$ נקבל

$$k \equiv 1 + l + \dots + l^{n-1} \pmod{\underbrace{\text{ord}(\sigma_n)}_{l^n}} = \frac{1-l^n}{1-l} \pmod{l^n}$$

$$(1-l)k \equiv 1 \pmod{l^n}$$

וזאת לכל n . לכן נקבל $(1-l)k = 1$, אבל מכאן נקבל $k = \pm 1$ וגם $1-l = \pm 1$. ולקחנו $l \geq 3$, אז זו סתירה.